

Chapitre II

ANALYSE

par Mikhaïl A. Lavrentiev et Sergueï M. Nikolski

Contenu :

- II.1 Introduction
 - II.2 Fonction
 - II.3 Limite
 - II.4 Fonctions continues
 - II.5 Dérivée
 - II.6 Règles de différentiation
 - II.7 Maximums et minimums. Exploration du graphe d'une fonction
 - II.8 Accroissement et différentielle d'une fonction
 - II.9 Formule de Taylor
 - II.10 Intégrale
 - II.11 Intégrales indéfinies. Techniques d'intégration
 - II.12 Fonctions à plusieurs variables
 - II.13 Généralisation du concept d'intégrale
 - II.14 Séries
- Suggestions de lecture

II.1 Introduction

L'émergence de nouvelles structures économiques et sociales en Europe à la fin du Moyen Âge et la naissance du capitalisme qui remplaçait le système féodal furent accompagnées par de grandes découvertes géographiques et scientifiques. En 1492, se fondant sur l'idée que la Terre était ronde, Christophe Colomb découvrit le Nouveau Monde. Sa découverte élargit considérablement le monde connu à l'époque et déclencha une révolution dans les esprits. À la fin du xv^e et au début du xvi^e siècle les grands artistes humanistes, Léonard de Vinci, Raphaël, Michel-Ange, produisaient des œuvres qui renouvelaient l'art. En 1543 fut publié l'ouvrage de Copernic *Des révolutions des orbés célestes* qui bouleversa le visage de l'astronomie; en 1609 parut *La nouvelle astronomie* de Kepler qui contenait ses deux premières lois du mouvement des planètes autour du Soleil, et en 1618 son livre *Les harmonies du monde* qui contenait la troisième. Galilée, en partant de l'étude des inventions d'Archimède et avec des expériences ingénieuses, commença à créer une nouvelle mécanique; celle-ci était absolument nécessaire pour les techniques qui apparaissaient. En 1609, Galilée dirigea la lunette astronomique petite et imparfaite qu'il venait de construire vers le ciel nocturne. Un seul coup d'œil dans l'oculaire suffisait pour mettre à bas la théorie des sphères célestes idéales d'Aristote et le dogme de la perfection des corps célestes. La surface de la Lune présentait des montagnes et était criblée de cratères. Vénus révélait qu'elle avait des phases comme la Lune. Jupiter était entouré de quatre satellites, ce qui permettait d'observer une sorte de système solaire en miniature. La Voie lactée n'était plus une écharpe blanche et soyeuse à travers le firmament mais était composée d'innombrables étoiles distinctes, et pour la première fois on ressentit les distances stupéfiantes qui nous en séparaient. Jamais aucune découverte scientifique n'avait eu un tel effet sur le monde cultivé! (Nous nous sommes inspirés pour ce paragraphe de l'excellent article « Galilée » par l'académicien S.I. Vavilov, dans la *Grande Encyclopédie soviétique*, tome 10.)

La navigation à travers les océans, les recherches des astronomes qu'elle stimulait, le développement des techniques, en parallèle à celui de la mécanique, tout cela rendait absolument indispensable la création de méthodes pour résoudre les nombreux nouveaux problèmes mathématiques que cela engendrait. La nouveauté de ces problèmes consistait principalement en ce qu'il était nécessaire d'étudier mathématiquement dans un sens très large des lois de mouvement.

L'état d'immobilité ou de repos est inhabituel dans la nature. Depuis ses plus petites particules jusqu'à ses corps les plus importants, toute la nature, a souligné F. Engels, est dans un perpétuel état de flux, de naissances et de disparitions, dans un incessant mouvement ou changement. Chaque science de la nature, en définitive, étudie certains aspects, certaines formes de ce mouvement. L'analyse est la branche des mathématiques qui fournit des méthodes pour l'étude *quantitative* des différents processus de changement ou de mouvement, et la dépendance de certaines quantités vis-à-vis d'autres. Ce n'est par conséquent pas une coïncidence qu'elle soit apparue quand le développement de la mécanique et de l'astronomie, stimulé par les questions techniques et de navigation, avait déjà accumulé suffisamment d'observations, de mesures, d'hypothèses, pour permettre à la science de s'approcher d'une étude quantitative des types de mouvements les plus simples.

Le nom « analyse infinitésimale » par lui-même ne dit rien sur son sujet d'étude, mais il précise la méthode utilisée par cette branche des mathématiques. Nous allons commencer par donner des exemples typiques du mode de raisonnement, qui utilise le concept de limite, puis nous clarifierons les concepts nécessaires.

Exemple 1. Comme l'a montré Galilée expérimentalement, la distance s parcourue par un corps lâché en chute libre dans le vide pendant un temps t est donnée par la formule

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad (\text{II.1})$$

où g est une constante égale à $9,81 \text{ m/s}^2$. Maintenant on déduit cette formule des lois générales de la mécanique, mais historiquement c'est justement elle qui fut trouvée grâce à des expériences puis généralisée pour parvenir à ces lois. La question qui nous intéresse est : quelle est la vitesse du corps en chute libre en chaque point de sa trajectoire ?

Appelons A le point par lequel passe le corps au temps t . Considérons ce qui va se passer ensuite durant un court laps de temps Δt , c'est-à-dire du temps t au temps $t + \Delta t$. La distance parcourue va elle-même s'accroître d'un certain incrément Δs . La distance au début de l'intervalle de temps, c'est-à-dire au temps t , est $s_1 = \frac{gt^2}{2}$; puis au temps $t + \Delta t$ elle est devenue

$$s_2 = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$$

À partir de là nous trouvons l'accroissement spatial¹

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$$

C'est la distance parcourue dans le laps de temps $[t, t + \Delta t]$. Pour trouver la vitesse moyenne pendant ce parcours, on divise l'accroissement de distance Δs par l'accroissement de temps Δt

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t$$

En faisant tendre Δt vers zéro, la vitesse moyenne va s'approcher infiniment près de la « vraie vitesse » exactement au point A , qui est par définition la *vitesse instantanée* au point A , ou si l'on préfère au temps t . Du côté droit de l'équation, on a les deux termes gt et $\frac{g}{2}\Delta t$. Nous voyons qu'en faisant tendre Δt vers zéro, le second terme va disparaître, et il ne restera plus que gt . On note généralement ce *passage à la limite* de la manière suivante :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (gt + \frac{g}{2}\Delta t) = gt$$

1. Dans ces deux formules, Δt^2 est une notation allégée pour $(\Delta t)^2$ c'est-à-dire pour le carré de l'incrément ou accroissement temporel Δt .

Par conséquent gt est la vitesse instantanée à l'instant t .

Exemple 2. Un réservoir avec un fond carré de côté a et quatre panneaux latéraux verticaux de hauteur h est rempli d'eau à ras bord (figure II.1). Avec quelle force totale l'eau pousse-t-elle sur chaque panneau latéral ?

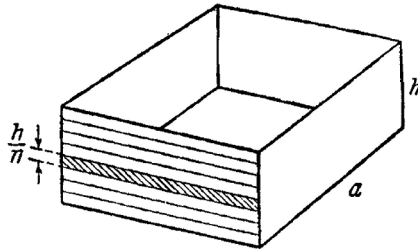


Figure II.1 : Réservoir rempli d'eau.

Divisons la surface d'un panneau en n tranches horizontales de hauteur $\frac{h}{n}$. La pression en un point quelconque d'un côté du réservoir est, comme l'on sait, celle exercée par la colonne d'eau au-dessus du point. Ainsi en descendant en haut du réservoir, la pression au point le plus bas de chaque tranche est exactement égale à $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}, \dots, \frac{(n-1)h}{n}, h$. Nous allons obtenir une valeur approchée de la force F recherchée en faisant l'hypothèse que sur chaque bande la pression est constante. On arrive à l'expression

$$F \approx \frac{ah}{n} \frac{h}{n} + \frac{ah}{n} \frac{2h}{n} + \dots + \frac{ah}{n} \frac{(n-1)h}{n} + \frac{ah}{n} h$$

le membre de droite se réécrit

$$= \frac{ah^2}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{ah^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{ah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Pour trouver la valeur exacte de la force, nous allons faire un découpage en tranches de plus en plus fines, augmentant sans limite n . Quand n s'accroît, la valeur de $\frac{1}{n}$ ci-dessus

devient de plus en plus petite, et à la limite nous obtenons pour la *force* F la formule exacte

$$F = \frac{ah^2}{2}$$

L'idée du passage à la limite est très simple et consiste en ceci : afin de déterminer une certaine valeur, nous déterminons d'abord non pas la valeur elle-même mais une valeur approchée. Et nous ne construisons pas une seule approximation, plus ou moins bonne, mais une suite d'approximations de plus en plus précises. Ensuite, en examinant cette suite d'approximations, c'est-à-dire en examinant le processus lui-même, la valeur exacte de la quantité recherchée est déterminée de manière unique. Par cette méthode profondément dialectique, on détermine une valeur constante (la limite recherchée) à l'aide d'une suite de valeurs variables (la succession des approximations).

La méthode mathématique des limites est le résultat du travail considérable de nombreuses générations de savants sur des problèmes qui ne pouvaient pas être résolus simplement par les techniques de l'arithmétique, l'algèbre ou la géométrie élémentaires.

Quels étaient donc ces problèmes pour la solution desquels les concepts de base de l'analyse furent élaborés ? Quelles méthodes pour les résoudre furent-elles créées ?

Les mathématiciens du XVII^e siècle découvrirent peu à peu qu'un grand nombre de problèmes apparaissant dans l'étude de toutes sortes de mouvements ou de dépendances d'une quantité par rapport à une ou plusieurs autres, et de problèmes de géométrie jusqu'alors insolubles, se ramenaient à deux types.

Les exemples les plus simples de problèmes du premier type sont : la question de trouver la vitesse instantanée à n'importe quel moment d'un objet ayant un mouvement irrégulier, et des questions similaires sur le taux de variation local de quantités les unes par rapport aux autres ; et aussi le problème de tracer la tangente en n'importe quel point

d'une courbe. Ces problèmes (dont fait partie notre premier exemple) donnèrent naissance à la branche de l'analyse qui porte le nom de « calcul différentiel ».

Les exemples les plus simples du second type de problèmes sont le calcul de la surface (l'aire) de figures curvilignes, la distance totale parcourue par un objet ayant un mouvement irrégulier, et plus généralement le résultat total de l'action d'une quantité changeant constamment de manière continue (notre deuxième exemple est de ce type). Ce deuxième groupe de problèmes donna naissance à une autre branche de l'analyse – le « calcul intégral ».

Ainsi, on avait en définitive deux problèmes : celui des tangentes et celui des quadratures.

Ce chapitre va décrire en détail sur quelles idées repose la solution de ces deux problèmes. Particulièrement important va être le rôle joué par le théorème de Newton et Leibniz montrant que le problème de la quadrature est, en un certain sens, le problème inverse du problème de la tangente. Pour résoudre le problème de la tangente et les problèmes qui s'y ramenaient, un algorithme commode et très général fut trouvé – une méthode générale qui menait astucieusement à la solution –, la méthode de la dérivée, ou si l'on préfère de la différentiation.

L'histoire de la création et du développement de l'analyse et le rôle qu'y joua à l'origine la géométrie analytique créée par Descartes ont déjà été décrits au chapitre I. Nous avons vu que durant la deuxième moitié du XVII^e siècle et la première moitié du XVIII^e les mathématiques vécurent un bouleversement. Aux branches déjà existantes – l'arithmétique, la géométrie élémentaire, les principes de base de l'algèbre et de la trigonométrie – furent ajoutées les méthodes générales que sont la géométrie analytique, le calcul différentiel, le calcul intégral et la théorie des équations différentielles ordinaires. Il devint possible de résoudre des problèmes dont la solution avait jusqu'alors toujours semblé hors de portée.

Il s'avéra que si l'équation de la courbe que vous étudiez n'est pas trop compliquée, alors vous pouvez toujours

construire l'équation de sa tangente en n'importe quel point – vous avez juste besoin de calculer ce qu'on appelle la fonction dérivée en utilisant les règles du calcul différentiel, ce qui dans beaucoup de cas ne prend que quelques minutes. Auparavant, hormis avec une règle et un crayon, on était seulement capable de construire les tangentes au cercle et à deux ou trois autres courbes et on ne s'attendait pas à ce que le problème eût une solution générale.

Si vous connaissez la trajectoire parcourue par un point et sa position à n'importe quel moment, alors, de la même manière, vous pouvez immédiatement connaître sa vitesse instantanée à ce moment-là ainsi que son accélération. Inversement, à partir de son accélération vous pouvez retrouver sa vitesse et même sa position en utilisant l'opération inverse de la différentiation – c'est-à-dire l'intégration. De là, il n'était plus difficile, connaissant les propriétés de l'ellipse, de démontrer que si les planètes obéissaient aux lois de Newton du mouvement et à la loi de la gravitation universelle, alors elles suivaient nécessairement des orbites elliptiques autour du Soleil, comme l'avait énoncé Kepler.

Une question des plus importantes en pratique est celle de trouver des quantités maximales ou minimales, ce qu'on appelle le problème des extremums ou optimums. Prenons un exemple : dans un tronc d'arbre de section circulaire donnée, on veut découper une poutre de section rectangulaire de telle sorte qu'elle ait une flèche minimale quand elle supporte une charge. Quel ratio longueur sur largeur donner à la section rectangulaire de la poutre ? Une petite étude sur la résistance à la flèche d'une poutre de section rectangulaire (utilisant des considérations simples de calcul intégral), puis la résolution d'un problème d'extremum (pour lequel on utilisera le calcul d'une dérivée), donnent la réponse : la plus grande résistance à la flèche sera atteinte pour une poutre rectangulaire dont la hauteur de la section sera avec la largeur dans le rapport $\sqrt{2}$ sur 1. Les problèmes de calcul de maximum et de minimum se résolvent aussi simplement que ceux pour trouver une tangente.

En différents points d'une courbe, s'il ne s'agit pas d'une droite ou d'un cercle, la courbure est en règle générale variable. Comment calculer en un point donné de la courbe son « rayon de courbure », c'est-à-dire le rayon du cercle tangent à la courbe et exactement aussi courbé (appelé « cercle osculateur »)? Il s'avère que c'est encore un simple problème d'optimum ; il faut juste appliquer l'opération de différentiation deux fois. Le rayon de courbure joue un rôle important dans beaucoup de problèmes de mécanique.

Avant l'invention du nouveau calcul, on ne savait calculer la surface que des polygones, du cercle, d'un de ses secteurs ou segments, et de deux ou trois autres figures. En outre Archimède avait donné une méthode pour calculer la surface, ou superficie ou aire, d'un segment de parabole. Mais sa méthode, très ingénieuse, reposait sur des propriétés particulières des paraboles. Ce succès remarquable d'Archimède avait conduit à penser que pour chaque nouveau problème de calcul d'une surface, il faudrait sans doute élaborer une méthode particulière de plus en plus astucieuse et difficile. Quel ne fut donc pas l'émerveillement des mathématiciens quand il s'avéra que le théorème de Newton et Leibniz, montrant que l'inverse du problème de la dérivée résolvait le problème de la quadrature, permettait maintenant de calculer les surfaces encloses par une grande variété de courbes. On avait désormais une méthode générale adaptée à une immense quantité de figures. La même méthode s'appliquait au calcul des volumes, des surfaces, des longueurs de courbes, des masses d'objets hétérogènes, etc.

La nouvelle méthode atteignit en mécanique des succès encore plus extraordinaires. Il semblait qu'il n'y eût aucune question dans cette discipline que le nouveau calcul ne pût éclairer et résoudre.

Peu de temps avant, Pascal (1623-1662) avait expliqué que l'accroissement de la partie « contenant du vide » qu'on observait dans le baromètre de Torricelli (1608-1647) à mesure qu'on s'élevait en altitude était la conséquence de la diminution de la pression atmosphérique au cours de l'ascension.

Mais selon quelle loi cette pression diminuait-elle ? La question est maintenant résolue à l'aide d'une simple équation différentielle ordinaire.

Les marins savent bien qu'en enroulant une aussière une ou deux fois autour d'une bitte d'amarrage une personne seule peut retenir au mouillage un grand navire. Comment cela se peut-il ? Il s'avère que le problème est mathématiquement presque identique au précédent et que sa solution est immédiate.

Ainsi la création de l'analyse fut suivie par une période de progrès fulgurants de ses applications dans tous les domaines de la science et de la technologie. Créée en faisant abstraction des spécificités concrètes des problèmes auxquels elle s'attaquait, l'analyse mathématique reflète néanmoins les propriétés profondes, matérielles du monde qui nous entoure. Et c'est précisément pourquoi elle est devenue un outil d'investigation dont le champ d'applications est si vaste. La dynamique des corps solides, la dynamique des fluides, des gaz, le mouvement de leurs parties et les lois d'évolution de leurs masses, les processus thermiques et électriques, le déroulement des réactions chimiques, etc., tous ces phénomènes sont étudiés dans les branches respectives de la science en faisant grand usage des outils de l'analyse mathématique.

En même temps que le champ de ses applications s'élargissait, l'analyse elle-même s'est considérablement enrichie ; apparurent et se développèrent des domaines particuliers comme la théorie des séries, les applications de l'analyse à la géométrie, et la théorie des équations différentielles.

La croyance était répandue chez les mathématiciens au milieu du XVIII^e siècle que n'importe quel problème des sciences de la nature, à condition de parvenir à le comprendre mathématiquement, c'est-à-dire trouver la bonne formulation mathématique, pourrait être résolu à l'aide de la géométrie analytique et du calcul différentiel et intégral.

Progressivement on s'attaqua à des problèmes de plus en plus difficiles issus des sciences de la nature et de la technique, nécessitant de développer des méthodes. Pour résoudre ces

problèmes, de nouvelles branches des mathématiques furent créées les unes après les autres : le calcul des variations, la théorie des fonctions de variables complexes, la théorie des champs, les équations intégrales, l'analyse fonctionnelle, qui résolvent ces nouvelles classes de problèmes. Mais tous ces nouveaux calculs sont essentiellement le prolongement et la généralisation du célèbre calcul découvert au XVII^e siècle. Les plus grands mathématiciens du XVIII^e siècle, Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), ouvrant de nouvelles voies, partirent toujours de problèmes concrets et urgents posés par les sciences exactes.

Le vigoureux développement de l'analyse se poursuivit au dix-neuvième siècle durant lequel de célèbres mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin Cauchy (1789-1857), Mikhaïl V. Ostrogradski (1801-1861), Pafnouti L. Tchebychev (1821-1894), Bernhard Riemann (1826-1866), Niels Henrik Abel (1802-1829), Karl Weierstrass (1815-1897), firent des contributions très importantes au développement de l'analyse mathématique.

Le mathématicien génial Nikolaï I. Lobatchevski (1792-1856) eut aussi une influence sur le développement de certaines questions en analyse mathématique.

Mentionnons encore les mathématiciens de premier plan qui vécurent à cheval entre le XIX^e et le XX^e siècle : Andreï A. Markov (1856-1922), Alexandre M. Liapounov (1857-1918), Henri Poincaré (1854-1912), Félix Klein (1849-1925), David Hilbert (1862-1943).

Dans la deuxième moitié du XIX^e siècle la compréhension des fondements des mathématiques que l'on avait eue jusque-là fut profondément remise en question. Cela conduisit à la construction de bases plus solides en particulier pour l'analyse. Les méthodes puissantes mais hétéroclites en analyse reçurent une justification systématique unique correspondant à la nouvelle exigence de rigueur plus élevée dans toute la discipline. Ce sont toutes des méthodes à l'aide desquelles, outre l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie et la trigonomé-

trie, une personne comprend mathématiquement le monde autour d'elle, décrit les différents phénomènes qui se manifestent et résout les questions que ces phénomènes soulèvent et qui sont importantes en pratique.

L'analyse atteignit un niveau de développement particulièrement riche dans notre pays, avec de nombreuses applications, en même temps que toute la science mathématique, après la Grande Révolution socialiste d'Octobre.

La géométrie analytique, le calcul différentiel et intégral et la théorie des équations différentielles sont étudiés dans toutes les institutions d'enseignement technique supérieur, si bien que ces branches des mathématiques sont connues en Union soviétique par des millions de gens ; la formation initiale est donnée dans de nombreux établissements techniques ; et la question se pose de les enseigner dans les filières générales du lycée.

L'arrivée des ordinateurs a marqué un tournant en mathématiques. Ces machines, conjointement avec toutes les nouvelles branches mentionnées ci-dessus, offrent des possibilités époustouflantes.

Maintenant l'analyse, et le cortège de branches qu'elle a engendrées, est une vaste discipline mathématique ramifiée, consistant en de nombreuses sous-disciplines indépendantes, cependant étroitement liées. Chacune d'entre elles s'améliore et va de l'avant, et une part significative de ces succès est au crédit de la science soviétique.

Plus que jamais, les demandes de la vie concrète sont le principal moteur du développement de l'analyse, notamment les problèmes liés aux grandioses réalisations techniques. Parmi eux se trouvent les problèmes mathématiques posés par l'aérodynamique aux vitesses supersoniques que peu à peu l'on parvient à résoudre.

Les problèmes les plus difficiles de la physique mathématique arrivent maintenant à un stade où on peut dans la pratique leur fournir des solutions numériques.

En physique contemporaine, les théories comme la mécanique quantique et les questions liées à la compréhension des

phénomènes à l'échelle atomique non seulement font appel aux résultats les plus avancés de l'analyse mathématique moderne, mais leurs concepts de base mêmes ne pourraient pas être formulés sans ses outils².

Le but du présent chapitre est de familiariser le lecteur et la lectrice, qui ne connaîtraient que les mathématiques élémentaires, avec les concepts fondamentaux de l'analyse et leurs applications les plus simples. Ces concepts de base sont les fonctions, les limites, les dérivées et les intégrales. Les domaines plus spécialisés de l'analyse seront traités dans d'autres chapitres de l'ouvrage. Par conséquent, ce chapitre est plus élémentaire que les autres, et le lecteur qui a déjà suivi un cours d'introduction à l'analyse peut le sauter sans dommage pour la compréhension de la suite.

II.2 Fonction

II.2.1 Le concept de fonction. Dans la nature les objets et phénomènes sont liés organiquement entre eux ; ils dépendent les uns des autres. Les connexions simples et statiques sont depuis longtemps l'objet d'étude. Les connaissances sur elles ont été accumulées et formulées en lois physiques. Dans la majorité des cas, ces lois expriment que différentes grandeurs qui caractérisent quantitativement un certain phénomène sont étroitement liées et qu'une ou plusieurs déterminent les autres. Par exemple, la longueur et la largeur d'un rectangle déterminent sa surface, le volume d'une quantité de gaz donnée à une certaine température est déterminé par sa pression, l'élongation d'une barre de métal est déterminée par sa température, etc. Ce type de relation très courante dans la nature a donné naissance au concept de fonction.

2. La mécanique quantique, née durant la troisième décennie du xx^e siècle (années 20), qui est la branche de la physique qui s'est le plus éloignée de la perception ordinaire que l'on a du monde qui nous entoure – encore davantage que la théorie de la relativité née entre 1890 et 1920 –, utilise aussi les espaces géométriques de dimensions infinies mais où les repères sur les axes sont des *nombres complexes*. Nous apprendrons tous ces outils au fil des chapitres de l'ouvrage.

Déjà dans une formule algébrique, où la connaissance des valeurs numériques de différentes quantités littérales permet de connaître celle d'une autre exprimée à l'aide des premières, se trouve le concept de fonction. Voyons quelques exemples de fonctions définies par des formules.

1) Supposons qu'une particule matérielle ponctuelle, initialement au repos, soit lâchée et tombe en chute libre sous l'effet de la gravité. Alors la distance verticale s parcourue par la particule en un temps t est donnée par la formule II.1

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

où g est l'accélération due à la gravité.

2) Une boîte est fabriquée à partir d'une forme carrée de côté a de telle sorte qu'elle ait une hauteur x et une base carrée de côté $(a - 2x)$, comme le montre la figure II.2.

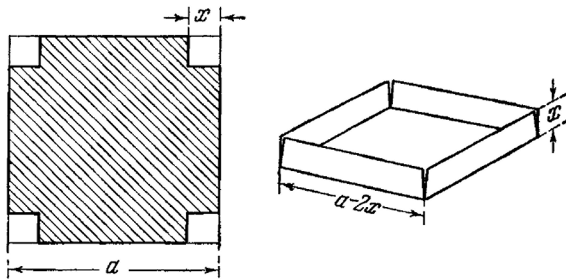


Figure II.2 : Boîte carrée.

Le volume de la boîte est donné par la formule

$$V = x(a - 2x)^2 \quad (\text{II.2})$$

Cette formule permet pour chaque hauteur x de connaître le volume de boîte. Elle est valable à condition bien sûr que

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

3) Supposons qu'au milieu d'une patinoire circulaire se trouve un lampadaire avec une ampoule placée à la hauteur h (figure II.3). La lumière T envoyée sur la patinoire peut être exprimée par la formule

$$T = \frac{A \sin \alpha}{h^2 + r^2} \quad (\text{II.3})$$

où r est le rayon de la patinoire, $\tan \alpha = \frac{h}{r}$, et A est un paramètre lié à la puissance de la lampe.

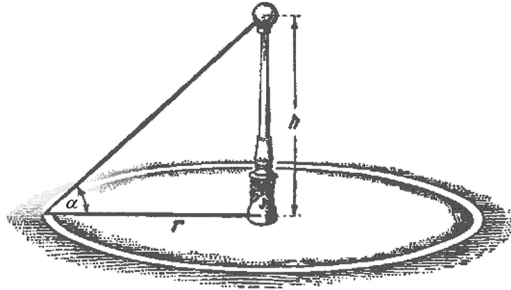


Figure II.3 : Patinoire circulaire éclairée par un lampadaire.

4) La racine de l'équation trinôme (ou quadratique)

$$x^2 + px - 1 = 0 \quad (\text{II.4})$$

est donnée par la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}} \quad (\text{II.5})$$

(comme le savent le lecteur et la lectrice, il y a deux racines x_1 et x_2 , et l'expression (II.5) représente en réalité *deux* formules, une avec le signe +, l'autre avec le signe -).

C'est une caractéristique des formules en général, et de celles données ci-dessus en illustration en particulier : si on connaît les valeurs de certaines variables (le temps t , la hauteur de la boîte x , la hauteur du lampadaire h , le paramètre

p dans le trinôme), appelées les *variables indépendantes*, on peut calculer la valeur d'une autre quantité (la distance s de chute, le volume V de la boîte, la lumière T reçue par la patinoire, la racine x de l'équation), qui porte le nom de *variable dépendante* ou de *fonction des variables indépendantes*.

Chacune des formules précédentes nous donne un exemple de fonction : la distance parcourue par le point dans sa chute est fonction du temps t ; le volume de la boîte est fonction de sa hauteur x ; l'éclairage de la piste est fonction de la hauteur h du lampadaire ; les deux racines de l'équation quadratique II.4 sont chacune fonction du coefficient p .

Il convient de noter que dans certains cas la variable indépendante peut prendre n'importe quelle valeur numérique, comme dans le quatrième exemple, où le coefficient p de l'équation quadratique II.4, qui est la variable indépendante, peut être un nombre quelconque sans limitation dans ses valeurs possibles. Dans d'autres cas, la variable indépendante peut prendre n'importe quelle valeur dans un certain ensemble limité de nombres, comme dans le deuxième exemple, où le volume de la boîte est fonction de sa hauteur, laquelle peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des nombres x satisfaisant les inégalités $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. De même, dans l'exemple 3, l'éclairage de la piste est une fonction de la hauteur h , qui peut théoriquement prendre n'importe quelle valeur satisfaisant l'inégalité $h > 0$, mais dans la pratique seulement n'importe quelle valeur telle que $0 < h \leq H$ où le paramètre H est déterminé par les possibilités techniques à la disposition des concepteurs de la patinoire.

Voyons encore quelques exemples. La formule

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

définit une fonction réelle exprimant la relation entre les deux nombres réels x et y . Mais il est évident qu'elle ne s'applique pas à toutes les valeurs de x , seulement à celles telles que $-1 \leq x \leq 1$. Pour $y = \log(1 - x^2)$, il faut même que x satisfasse les inégalités strictes $-1 < x < 1$.

Ainsi nous devons prendre en compte le fait que des fonctions spécifiques peuvent ne pas être définies pour toutes les valeurs numériques imaginables de la variable indépendante, mais seulement pour certaines valeurs de x , généralement dans un certain segment de l'axe des abscisses (avec ou sans les bornes du segment).

Nous pouvons déjà donner une définition du concept de fonction, qui est celui généralement accepté de nos jours en mathématiques :

La quantité y est une fonction de la quantité (indépendante) x , s'il existe une loi qui à chaque valeur de x appartenant à un certain ensemble de nombres fait correspondre une certaine valeur de y .

L'ensemble des valeurs possibles de x mentionné dans cet énoncé s'appelle le *domaine de définition de la fonction*.

Chaque nouveau concept engendre un nouveau symbolisme. La transition de l'arithmétique vers l'algèbre a consisté en la possibilité de construire des formules valables pour n'importe quelles valeurs numériques. La recherche d'expressions uniques conduisit aux formules avec des lettres.

Le problème de l'analyse est celui de l'étude des fonctions – la dépendance d'une quantité vis-à-vis d'une autre ; de même qu'en algèbre nous sommes passés de nombres spécifiques à des nombres quelconques exprimés par des lettres, de même en analyse nous passons des expressions de fonctions spécifiques à celles de fonctions arbitraires. La phrase « soit y une fonction de x » sera écrite, sans spécifier davantage la relation entre x et y , de la manière suivante :

$$y = f(x)$$

Et de même qu'en algèbre différentes lettres sont utilisées pour différents nombres, en analyse pour dénoter différentes dépendances – c'est-à-dire différentes fonctions – nous utiliserons des notations variées : $y = F(x)$, $y = \phi(x)$, $y = g(x)$, etc.

II.2.2 Graphe d'une fonction. L'une des idées les plus fructueuses et les plus brillantes de la seconde moitié du XVII^e siècle est l'idée du lien entre le concept de fonction et celui de courbe géométrique. On peut rendre cette connexion concrète, par exemple, avec un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires sur une feuille de papier. Ce procédé est naturellement familier dans ses grandes lignes au lecteur et à la lectrice depuis le lycée. Rappelons cependant en quoi ça consiste.

Nous définissons un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires dans le plan. C'est-à-dire, nous sélectionnons dans ce plan deux lignes droites perpendiculaires, qui formeront l'axe horizontal, appelé aussi axe des abscisses, ou axe des x , et l'axe vertical, appelé aussi axe des ordonnées, ou axe des y ; nous choisissons une unité de longueur, et sur chaque axe ce qui sera la direction positive.

Alors à chaque point M du plan on peut associer deux nombres, la paire (x, y) qui forme les *coordonnées du point*. Le nombre x s'appelle l'abscisse de M , et y l'ordonnée de M . Ces deux coordonnées sont construites de la manière suivante : avec l'unité de longueur choisie et le signe approprié, elles sont respectivement la distance de M à l'axe vertical (avec le signe $+$ si M est à droite, $-$ s'il est à gauche) et sa distance à l'axe horizontal (avec $+$ si M est au-dessus, $-$ s'il est en dessous), voir la figure I.6 page 74.

Maintenant à l'aide du système de coordonnées, on peut représenter une fonction comme une courbe. En effet soit une fonction donnée

$$y = f(x) \tag{II.6}$$

Cette équation veut dire, comme nous le savons, qu'à chaque valeur de x , se trouvant dans le domaine de définition de la fonction, il est possible de déterminer d'une manière ou d'une autre, par exemple par le calcul, la valeur correspondante de y . Nous faisons varier la variable indépendante x dans tout son domaine de définition. Pour chaque valeur de x , nous déterminons selon notre équation II.6 la valeur de y , et nous traçons sur le plan – notre feuille de papier – le point cor-

respondant ayant les coordonnées x et y . On peut le faire en deux temps : d'abord sur l'axe des x on reporte le point M' à la distance x de l'origine O ; puis à la verticale de M' on reporte le point M à la hauteur y (figure II.4). Le point M a donc les coordonnées x et y . L'ensemble des points M ainsi obtenus forment une certaine ligne courbe. C'est le graphe de notre fonction $y = f(x)$.

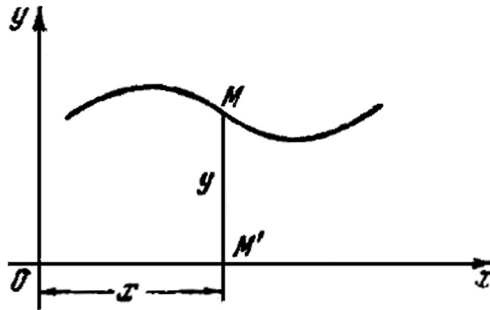


Figure II.4 : Graphe d'une fonction $y = f(x)$.

Ainsi le lieu géométrique de tous les points dont les coordonnées satisfont l'équation II.6 s'appelle le *graphe de la fonction* $f(x)$.

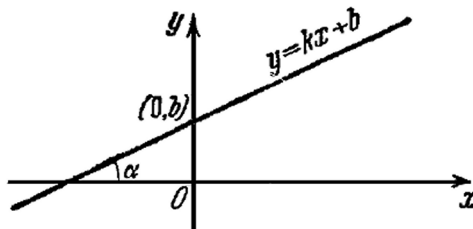


Figure II.5 : Graphe de la fonction linéaire $y = kx + b$.

À l'école on s'est familiarisé avec les graphes des fonctions les plus simples. Ainsi, le lecteur et la lectrice savent certainement que la fonction $y = kx + b$, où k et b sont des nombres

constants, ce que l'on appelle des paramètres, est représentée graphiquement (figure II.5) par une droite formant avec l'axe des x un angle α , tel que $\tan \alpha = k$, et coupant l'axe des y au point $(0, b)$. Cette fonction porte le nom de *fonction linéaire*.

On rencontre très souvent des fonctions linéaires dans les applications. Rappelons-nous que de nombreuses lois physiques sont exprimées avec beaucoup de précision par des fonctions linéaires. Par exemple la longueur l d'un corps est exprimée, avec une bonne approximation, comme une fonction linéaire de sa température t

$$l = l_0 + \alpha l_0 t$$

où α est le coefficient de dilatation, et l_0 la longueur du corps quand $t = 0$.

Considérons un point se déplaçant sur une certaine trajectoire, droite ou curviligne, peu importe, dans un espace quelconque. Et repérons sa position sur sa trajectoire en fonction du temps. Si x est le temps et y la distance parcourue par le point entre le temps 0 et le temps x sur cette trajectoire, alors la fonction linéaire $y = kx + b$ exprime clairement le fait que le point se déplace avec une vitesse constante k ; le paramètre b dénote la position de notre point sur sa trajectoire au temps $x_0 = 0$, c'est-à-dire sa distance à ce moment-là par rapport à un point choisi comme origine sur la trajectoire.

La possibilité de considérer beaucoup de fonctions $y = f(x)$ comme étant approximativement droites, au moins quand on se limite à un petit intervalle d'évolution de la variable indépendante x , c'est-à-dire « localement », et la simplicité de leur manipulation rend l'utilisation des fonctions linéaires très courante.

Dans d'autres cas, l'emploi de dépendances fonctionnelles différentes est nécessaire. Pensons à la loi de Boyle-Mariotte.

$$v = \frac{c}{p}$$

où la dépendance entre p et v est *inversement proportionnelle*. Le graphe d'une telle dépendance est une hyperbole (figure II.6).

La loi physique de Boyle-Mariotte correspond au cas où p et v sont positifs ; elle est décrite par la branche de l'hyperbole située dans le premier cadran du plan cartésien (le quart en haut à droite délimité par les deux axes).

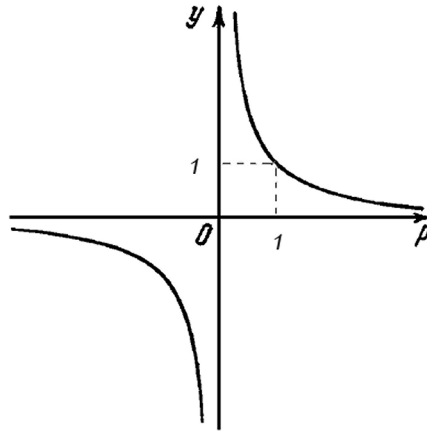


Figure II.6 : Hyperbole (où l'on a pris $c = 1$) et loi de Boyle-Mariotte.

Dans le cas d'un processus oscillatoire, on a affaire à un mouvement périodique qui est le plus souvent décrit à l'aide d'une des fonctions trigonométriques, qui, comme l'on sait, sont périodiques.

Par exemple, si une masselotte A , suspendue au repos au bout d'un ressort, est déplacée par rapport à son point d'équilibre en la tirant verticalement vers le bas, tout en restant dans la zone d'élasticité du ressort, elle se mettra à osciller en suivant avec une grande précision la loi

$$x = a \cos(pt + \alpha)$$

où x est l'écart de A avec son position d'équilibre, t est le temps, et les nombres a , p et α des paramètres fixes déterminés par les caractéristiques matérielles du ressort, sa raideur, sa longueur, et le déplacement initial donné à la masselotte.

Il faut garder à l'esprit qu'une fonction peut être définie dans différentes parties de son domaine de définition par des formules différentes ; cela dépend des circonstances. Par exemple la relation $Q = f(t)$ entre la température t d'un gramme d'eau (éventuellement sous forme de glace) et la quantité de chaleur Q qu'il contient, quand t varie entre -10° et $+10^\circ$, est une fonction parfaitement définie mais difficile à exprimer avec une formule unique. En revanche avec deux formules, c'est facile. Étant donné que la chaleur spécifique de la glace est 0,5 tandis que celle de l'eau est 1, si nous disons par convention qu'à -10° la quantité de chaleur est $Q = 0$, alors on a la formule

$$Q = 0,5t + 5$$

quand t varie dans la plage de valeurs $-10^\circ \leq t < 0^\circ$, et la formule différente

$$Q = t + 85$$

quand t varie dans la plage de valeurs $0^\circ < t \leq 10^\circ$.

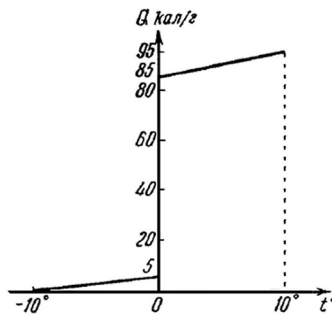


Figure II.7 : Chaleur spécifique de la glace et de l'eau.

Pour $t = 0$, la fonction n'est pas définie – elle est ambiguë ; par convention, on peut dire qu'à la température zéro, la fonction prend une valeur bien définie, par exemple $f(0) = 45$. Le graphe de la fonction $Q = f(t)$ est représenté sur la figure II.7.

Nous avons donné de nombreux exemples de fonctions définies par des formules. La méthode consistant à utiliser une expression algébrique pour spécifier la relation entre diverses quantités variables est d'un point de vue mathématique la plus importante, parce qu'avec cette méthode on est dans la situation la plus favorable pour étudier mathématiquement les propriétés de la fonction.

Cependant, il ne faudrait pas croire qu'une formule soit la seule façon de définir une fonction. Il existe beaucoup d'autres façons, parmi lesquelles le dessin de la fonction, donnant une vue géométrique claire, est particulièrement important. On va mieux comprendre l'idée avec l'exemple suivant.

Pour connaître la façon dont la température de l'air varie au cours de la journée, dans les stations météorologiques on utilise un appareil appelé un thermographe. Il est composé des pièces suivantes : un tambour tournant lentement autour d'un axe vertical en 24 heures à l'aide d'un mécanisme d'horlogerie ; sur le tambour est enroulée une feuille de papier millimétré ; à côté du tambour une pièce en laiton se dilate ou se rétracte verticalement en fonction de la température, formant ainsi un thermomètre ; une aiguille est assujettie à ce thermomètre de telle sorte que le mouvement de celui-ci soit amplifié par l'aiguille ; elle trace une ligne continue sur le papier du tambour. Une fois retirée et mise à plat la feuille de papier millimétré montre le graphe de la fonction $T = f(t)$ exprimant graphiquement la relation entre l'heure de la journée t et la température enregistrée T . À l'aide de ce graphique, il est possible de connaître la température T à n'importe quel moment t de la journée écoulée sans passer par une formule algébrique.

Cet exemple montre que le graphe par lui-même détermine la fonction, qu'elle soit donnée ou non par une formule.

Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre XII, volume 2, où nous démontrerons l'assertion très importante suivante : chaque graphe continu peut être représenté par une formule ou, selon le terme consacré, une expression analytique. C'est vrai aussi de nombreux graphes discontinus. Bien

sûr, cette assertion deviendra complètement claire pour le lecteur et la lectrice seulement après qu'on aura défini précisément ce qu'on entend en mathématiques par « formule » et « expression analytique ».

Noter que ce n'est qu'au milieu du XIX^e siècle que les mathématiciens prirent conscience de ce fait qui est d'une importance capitale au niveau des fondements. Jusqu'alors, les mathématiciens n'acceptaient comme « fonction » qu'une relation définie par une expression analytique, c'est-à-dire une *formule*. En même temps, ils pensaient – par erreur – que cela restreignait l'ensemble des fonctions par rapport à l'ensemble des graphes continus.

Mais au XIX^e siècle on découvrit qu'à tous les graphes continus correspondait une formule, plus ou moins complexe certes. C'est pourquoi le rôle de l'expression analytique (la formule) pour définir une fonction cessa d'être primordial ; et l'on préféra la définition plus souple du concept de fonction donnée plus haut. Selon celle-ci, une variable y est appelée une fonction d'une variable x s'il existe une *règle* en vertu de laquelle à chaque valeur de x dans le domaine de définition de la fonction correspond une valeur bien définie de y , quelle que soit la façon dont la règle est spécifiée : formule, graphe, table, ou quelque autre mode.

Il convient de noter que dans la littérature mathématique la définition moderne qu'on vient de donner est souvent attribuée à Dirichlet. Soulignons que cette définition fut en réalité donnée simultanément et indépendamment par Dirichlet et Lobatchevski.

Pour terminer, comme exercice nous invitons le lecteur et la lectrice à dessiner les graphes des fonctions suivantes :

$$x^3, \quad \sqrt{x}, \quad \sin x, \quad \sin 2x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\ln x, \quad \ln(1+x), \quad |x-3|, \quad \frac{x+|x|}{2}$$

Rappelez-vous que le graphe d'une fonction qui satisfait

$$f(-x) = f(x)$$

présente une symétrie axiale par rapport à l'axe des y . Et si on a

$$f(-x) = -f(x)$$

il présente une symétrie centrale par rapport à l'origine des coordonnées. Demandez-vous comment obtenir le graphe de $f(a+x)$, où a est un paramètre constant, à partir du graphe de $f(x)$. Enfin, trouvez comment, en utilisant les graphes des fonctions $f(x)$ et $\phi(x)$, on peut trouver pour chaque x la valeur de la fonction plus compliquée $y = f[\phi(x)]$, appelée la « composée » de f et g et notée parfois aussi $f \circ \phi(x)$ (voir page 94).

II.3 Limite

Au paragraphe II.1 nous avons dit que l'analyse mathématique moderne utilisait des méthodes particulières qui ont été en gestation pendant de nombreux siècles et qui sont utilisées pour raisonner en analyse. Nous allons parler ici de la méthode des infinitésimaux, ou ce qui revient essentiellement au même, la méthode des limites. Commençons par essayer de donner une idée de ces concepts. Considérons pour ce faire l'exemple suivant.

On veut calculer la surface délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des x et la droite verticale passant par $x = 1$ (figure II.8). Les mathématiques élémentaires ne nous permettent pas de résoudre ce problème. Mais voici comment on peut s'y prendre.

Divisons le segment $[0, 1]$ sur l'axe des x en n intervalles ayant pour bornes les points

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

et construisons sur chaque intervalle un rectangle dont le coin en haut à gauche touche juste la parabole.

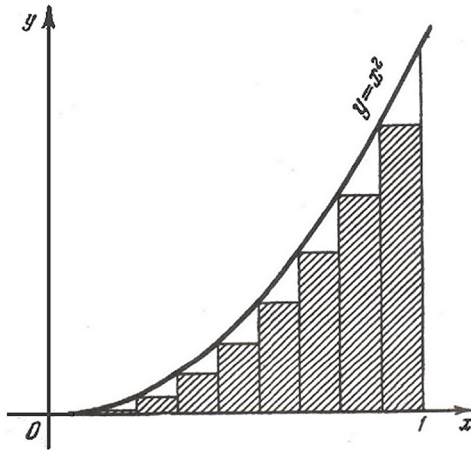


Figure II.8 : Calcul d'une surface par passage à la limite

On obtient une collection de bandes rectangulaires verticales, que nous avons hachurées sur la figure II.8, dont la surface totale S_n est donnée par la formule

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \quad (1)$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \quad (2)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

Nous avons utilisé la formule qu'on apprend au lycée

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

avec $k = n - 1$. On la démontre généralement par récurrence. Voici une autre façon équivalente : considérons la collection d'identités $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, pour $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Additionnons d'un côté tous les membres

de gauche et d'un autre côté tous les membres de droite de cette collection de $n - 1$ identités. On obtient

$$n^3 - 1 = 3\sigma_n + \frac{3(n-1)n}{2} + n - 1$$

où σ_n représente la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2$. En résolvant cette dernière équation pour σ_n on obtient

$$\sigma_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Regardons la quantité S_n sous la forme suivante :

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3} + \alpha_n \quad (\text{II.7})$$

La quantité α_n , qui dépend de n , bien qu'elle soit plutôt malcommode, a une propriété remarquable : si on fait croître n indéfiniment, alors α_n va tendre vers zéro. Cette propriété peut aussi être énoncée de la manière suivante :

quel que soit un nombre positif ϵ , arbitrairement petit, il existe un nombre N tel que pour tout n supérieur à N , la valeur absolue de α_n sera plus petite que ϵ .

Rentrons un peu dans le détail pour nous convaincre que α_n a bien cette caractéristique. Par exemple, si on prend $\epsilon = 0,001$, on peut prendre $N = 500$. En effet, étant donné que

$$\frac{1}{6n^2} < \frac{1}{2n}$$

quand n est positif, dès que $n > 500$ on a

$$|\alpha_n| = \left| \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{2n} < 0,001$$

De manière similaire, on pourrait prendre des valeurs encore plus petites de ϵ , par exemple

$$\epsilon_1 = 0,0001, \quad \epsilon_2 = 0,00001, \dots$$

et chaque fois déterminer une borne inférieure pour $n : N = N_1, N_2, \dots$

La quantité α_n est un exemple d'infinitésimal dans le sens où on l'entend en mathématiques contemporaines.

Géométriquement, sur la figure II.8, nous voyons qu'à mesure qu'on augmente le nombre d'intervalles n , la somme S_n des surfaces des rectangles hachurés va se rapprocher de la surface sous la courbe. D'un autre côté, nous tournant vers l'algèbre, étant donné que α_n tend vers zéro quand n s'accroît sans limite, l'équation II.7 montre que la surface S_n va tendre vers $\frac{1}{3}$. Il s'ensuit que la surface S sous la courbe, qui est la valeur que nous recherchons, vaut forcément $\frac{1}{3}$. Et nous avons résolu notre problème.

La méthode que nous venons de présenter se ramène à ceci : pour trouver une certaine quantité S nous avons introduit une *quantité variable* S_n qui tend vers S quand n s'accroît indéfiniment. En d'autres termes, nous avons construit – comme un échafaudage – une suite de quantités S_1, S_2, S_3, \dots , qui dépendent selon une certaine loi de la variable discrète n , et qui se rapprochent aussi près que l'on veut de S quand n parcourt les nombres entiers 1, 2, 3, 4 ... Ensuite, nous avons observé que la variable S_n pouvait être écrite comme la somme du nombre fixe $\frac{1}{3}$ et de l'infinitésimal α_n ; nous en avons conclu que S_n tendait vers $\frac{1}{3}$, et donc $S = \frac{1}{3}$.

Nous allons maintenant donner des définitions exactes des concepts que l'on vient de présenter avec une illustration.

Si la quantité variable α_n ($n = 1, 2, \dots$), autrement dit la suite des α_n , a la propriété que quel que soit le nombre positif arbitrairement petit ϵ , il existe un nombre suffisamment grand N tel que pour tout $n > N$ l'inégalité $|\alpha_n| < \epsilon$ est vérifiée, alors on dit que α_n est un *infinitésimal*. Et on l'écrit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad \text{ou encore} \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

En mathématiques contemporaines, un *infinitésimal* n'est donc plus cet objet *statique* mal défini, introduit par les mathématiciens qui construisirent l'analyse aux XVII^e et XVIII^e siècles, influencés par les idées de Démocrite sur les atomes

quand ils disaient que c'était une quantité à la fois non nulle mais plus petite que n'importe quel nombre ou fraction ordinaires. Maintenant un infinitésimal est un objet *dynamique* : c'est tout simplement une suite de nombres qui tendent vers zéro quand l'index qui les numérote augmente indéfiniment.

Ayant défini ce qu'est un infinitésimal, nous pouvons clarifier aussi la notion de limite vers un point quelconque. Si une variable (une suite) x_n peut être écrite sous la forme de la somme

$$x_n = a + \alpha_n$$

où a est un nombre fixe quelconque, et α_n un infinitésimal, on dit que la variable x_n (ou la « suite » x_n) tend vers le nombre a quand n augmente indéfiniment. Et on l'écrit

$$\lim x_n = a \quad \text{ou encore} \quad x_n \rightarrow a$$

Le nombre a s'appelle la *limite* de x_n . En particulier la limite d'un infinitésimal est évidemment zéro.

Regardons les limites de quelques suites simples quand n augmente indéfiniment :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}, & y_n &= -\frac{1}{n^2}, & z_n &= \frac{(-1)^n}{n}, & (3) \\ u_n &= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, & v_n &= (-1)^n \end{aligned}$$

On voit immédiatement que x_n , y_n et z_n tendent tous trois vers zéro, c'est-à-dire sont des infinitésimaux. La première tend vers zéro en décroissant ; la seconde tend vers zéro en croissant, en restant toujours du côté négatif de zéro ; et la troisième tend vers zéro en oscillant autour de lui. Quant à u_n et v_n , la première tend vers 1 et la seconde tend vers rien du tout, autrement dit n'a pas de limite. En effet, la suite v_n ne s'approche d'aucun nombre fixe à mesure que n augmente, mais continue à prendre indéfiniment les valeurs +1 et -1.

En analyse, le concept de *quantité qui s'accroît sans limite* est aussi important. On dit d'une variable x_n ($n = 1, 2, \dots$)

qu'elle s'accroît sans limite si elle satisfait la propriété suivante :

quel que soit le nombre M arbitrairement grand, on peut toujours trouver un nombre N tel que pour tous les $n > N$ on a

$$|x_n| > M$$

Le fait que x_n croisse sans limite est noté comme ceci :

$$\lim x_n = \infty \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow \infty$$

On dit d'une telle variable x_n qu'elle *tend vers l'infini*. Si à partir d'un certain index n cette variable est toujours positive (resp. toujours négative) alors on l'écrit $x_n \rightarrow +\infty$ (resp. $x_n \rightarrow -\infty$). Par exemple, pour $n = 1, 2, \dots$

$$\lim n^2 = +\infty, \quad \lim(-n^3) = -\infty,$$

$$\lim \log \frac{1}{n} = -\infty, \quad \lim \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right) = -\infty$$

Il est aisé de voir que si la quantité α_n tend vers l'infini, alors, à l'inverse, la quantité $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ tend vers zéro.

Deux quantités variables x_n et y_n peuvent s'additionner, se soustraire, se multiplier et se diviser l'une l'autre et produire d'une manière générale une nouvelle quantité variable : la somme $x_n + y_n$, la différence $x_n - y_n$, le produit $x_n y_n$ et le quotient $\frac{x_n}{y_n}$. Quand la variable indépendante n parcourra les entiers, on obtiendra respectivement

$$x_1 \pm y_1, \quad x_2 \pm y_2, \quad x_3 \pm y_3, \dots$$

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3, \dots$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_3}{y_3}, \dots$$

On peut aussi démontrer le fait en soi plutôt naturel que si deux variables x_n et y_n tendent vers des limites finies,

alors leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient tendent aussi respectivement vers la somme, la différence, le produit, et le quotient des limites. Avec nos notations cela s'écrit :

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$$

$$\lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

Seulement, dans le cas du quotient, il faut faire l'hypothèse que la limite du dénominateur y_n ne soit pas égale à zéro. Si $\lim y_n = 0$ et $\lim x_n \neq 0$, alors le rapport entre x_n et y_n ne va pas tendre vers une limite finie, mais va tendre vers l'infini.

Un cas très intéressant et en même temps très important se présente quand à la fois le numérateur x_n et le dénominateur y_n tendent vers zéro quand l'index n tend vers l'infini. Dans ce cas, il est impossible de dire à l'avance si le quotient $\frac{x_n}{y_n}$ tendra vers une limite ou pas. Et s'il tend vers une limite, on ne peut pas dire à l'avance vers laquelle. En effet, la réponse à cette question dépend entièrement de la façon spécifique dont x_n et y_n tendent l'un et l'autre vers zéro. Par exemple si on considère les trois variables

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{et} \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

alors

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \rightarrow \infty$$

Mais on a aussi

$$\frac{x_n}{z_n} = (-1)^n$$

qui manifestement ne tend pas vers quelque limite que ce soit, finie ou infinie.

Ainsi, dans le cas où le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers zéro, aucun théorème général ne permet de dire à l'avance vers quoi le quotient tendra, s'il

tend vers quelque chose, et chaque fraction de ce genre devra faire l'objet d'un examen particulier. Nous allons voir les différentes techniques pour « lever l'incertitude ».

Plus loin nous verrons aussi que le problème de base du calcul différentiel, qui peut être considéré comme le problème de trouver la vitesse instantanée d'un point ayant un mouvement irrégulier le long d'une trajectoire, se ramène justement à la détermination de la limite du ratio entre deux quantités infinitésimales – l'accroissement de la distance divisé par l'accroissement du temps. Autrement dit, le calcul différentiel est concerné de façon centrale par le problème de la limite de ratios dont les deux termes tendent vers zéro.

Passage du discret au continu pour la variable indépendante :

Ci-dessus nous avons considéré les variables x_n , c'est-à-dire la suite de valeurs numériques $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, quand l'index de comptage n parcourt l'ensemble des nombres entiers positifs $\{1, 2, 3, \dots\}$. Mais on peut aussi travailler avec une variable indépendante n qui n'est plus un index de comptage mais une variable continue, comme le temps. Dans ces conditions, par analogie, on peut aussi parler de la limite éventuelle de x_n ³. Les propriétés de telles limites sont complètement analogues aux propriétés formulées plus haut pour les suites discrètes, c'est-à-dire où la variable indépendante est un index discret et non une variable continue. En outre, au lieu de regarder une limite quand l'index n tendait vers l'infini, maintenant on peut aussi regarder une limite quand la variable continue n s'approche d'une valeur quelconque n_0 , plus nécessairement seulement l'infini.

À titre d'illustration, examinons l'évolution de la quantité $\frac{\sin x}{x}$ quand x s'approche de zéro. Le tableau ci-dessous présente la valeur de la fonction pour quelques valeurs de x :

3. La lettre n est généralement réservée à une variable indépendante discrète, c'est-à-dire un index de comptage. Maintenant qu'on la considère comme un nombre réel, qui va tendre vers une limite quelconque, on utilisera la notation plus habituelle pour les fonctions d'une variable indépendante continue, comme $y = f(x)$.

x	$\frac{\sin x}{x}$
0,50	0,9589 . . .
0,10	0,9983 . . .
0,05	0,9996 . . .
.

(les valeurs de x sont exprimées en radians)

Apparemment, quand x s'approche de zéro, $\frac{\sin x}{x}$ s'approche de 1, mais ceci, bien sûr, doit être prouvé. Pour la démonstration on peut s'appuyer sur l'inégalité suivante, valide pour tous les angles non nuls du premier quadrant :

$$\sin x < x < \tan x$$

En divisant tous les membres par $\sin x$ on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

d'où il découle que les inverses satisfont

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Mais étant donné, quand la valeur x décroît vers zéro, que $\cos x$ croît vers 1, la quantité $\frac{\sin x}{x}$ qui est prise en étau entre les deux, converge forcément aussi vers 1. Autrement dit, avec les notations standard, on a démontré que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Nous aurons l'occasion d'utiliser ce résultat.

Nous l'avons prouvé dans le cas où x tend vers zéro en restant positif. En adaptant un peu la démonstration, on prouve aussi aisément le résultat quand x tend vers zéro en étant négatif.

Arrêtons-nous maintenant sur une autre question. Une quantité variable peut avoir ou pas une limite. Se pose alors naturellement la question de savoir s'il est possible de trouver un critère grâce auquel on pourrait être sûr de l'existence d'une limite pour une variable. Regardons un cas important et assez général où un tel critère peut être établi. Imaginons que les quantités x_n soient croissantes, ou du moins ne décroissent pas, c'est-à-dire qu'on ait la suite d'inégalités

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

et qu'en outre on sache que les x_n sont bornés, c'est-à-dire qu'aucun n'excède un certain nombre M . Autrement dit on suppose qu'on sache aussi que $x_n \leq M$ (quel que soit n , ce qu'on note parfois $\forall n$). Si on marque les valeurs x_n et le nombre M sur l'axe des x , alors on voit que le point d'abscisse x_n variable se déplace vers la droite à mesure que l'index n augmente, tout en restant toujours à gauche du point M . Il est bien clair que les points x_n doivent nécessairement tendre vers un point limite a , qui soit est à gauche de M soit, dans le cas extrême, coïncide avec le point M lui-même.

Ainsi, dans le cas que nous étudions, la suite des x_n , ou dit autrement « la variable x_n », a une limite

$$\lim x_n = a$$

Le raisonnement ci-dessus est suggestif mais ne peut pas être considéré comme une démonstration rigoureuse. De nos jours dans les cours de mathématiques supérieures une justification complète de ce résultat repose sur la théorie des nombres réels et les axiomes de sa construction.

Pour donner un exemple, considérons la variable suivante

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Les premières valeurs sont $u_1 = 2$, $u_2 = 2,25$, $u_3 \approx 2,37$, $u_4 \approx 2,44$, ... Comme nous le voyons, elles sont croissantes. On peut, en développant l'expression de u_n avec la formule

du binôme de Newton, montrer qu'on augmente effectivement un peu chaque fois que l'on passe de n à $n + 1$. En outre, il est aisé de montrer que $\forall n$ (la notation pour « quel que soit n ») l'inégalité $u_n < 3$ reste satisfaite. Dans ce cas notre suite a forcément une limite inférieure ou égale au nombre 3. Comme nous le verrons par la suite, cette limite joue un rôle très important en analyse mathématique, étant en un sens la base la plus naturelle des logarithmes.

Cette limite est habituellement notée avec la lettre e . Elle a la valeur suivante

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\dots$$

Une étude plus détaillée montre que e n'est pas un nombre rationnel. À cet égard, il convient de noter que les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division (si on exclut la division par zéro), appliquées à des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers, produisent toujours d'autres nombres rationnels. Mais ce n'est plus vrai avec l'opérateur limite. La limite d'une suite de nombres rationnels peut être un nombre irrationnel.

Il est même possible de montrer que les u_n ont pour limite le nombre e non seulement quand $n \rightarrow +\infty$ mais aussi quand $n \rightarrow -\infty$. De surcroît, dans les deux cas, la variable indépendante n n'est pas limitée aux nombres entiers positifs ou négatifs, mais peut parcourir tous les nombres réels.

Nous voulons insister sur l'un des rôles importants du concept de limite dans les sciences de la nature. Il réside dans le fait que seulement avec l'aide du concept de limite (ou, si l'on préfère, de « passage à la limite ») nous sommes capables de donner une définition complètement satisfaisante de nombreuses valeurs concrètes que l'on rencontre dans les sciences de la nature.

Considérons l'exemple géométrique suivant. Dans les leçons de géométrie au collège et au lycée on commence par étudier des figures construites avec des lignes droites ou des segments de droites. Il est facile, en particulier, de parler de

la longueur d'une ligne brisée constituée d'une somme finie de segments bout à bout, par exemple la longueur totale du pourtour d'un triangle. Puis on s'attaque au problème plus difficile de trouver la longueur de la circonférence d'un cercle de rayon donné. Si nous analysons les difficultés que pose la solution de ce problème, nous voyons qu'elles se ramènent à ce qui suit :

Nous devons prendre conscience qu'avant de parler de la longueur de la circonférence, nous devons définir de quoi on parle. Nous devons donner une définition rigoureuse de la longueur s'appliquant à tous les cas où on en parle.

Il est essentiel évidemment qu'elle corresponde à la longueur ordinaire quand on regarde un segment de droite. Et elle doit dans tous les cas être calculable avec précision et efficacité.

Il va de soi que le résultat du calcul doit aussi être en accord avec la mesure pratique. Si par exemple nous entourions le cercle avec une ficelle, marquions sur elle deux points séparés exactement par un tour, puis la déroulions, la tendions, et mesurions la distance entre les deux points, il faudrait que, dans les limites de précision de l'opération pratique, nous obtenions le même nombre que celui donné par le calcul.

Depuis le lycée, le lecteur et la lectrice savent que ce problème est résolu de la manière suivante. La longueur de la circonférence du cercle est, *par définition*, la limite des périmètres d'une suite de polygones inscrits ayant de plus en plus de côtés (la longueur du plus grand d'entre eux tendant vers zéro). Ainsi la solution du problème est essentiellement basée sur le concept de limite.

On définit de façon comparable la longueur d'une courbe quelconque, suffisamment lisse. Dans les prochains paragraphes nous rencontrerons de nombreux exemples de grandeurs géométriques et physiques dont la définition exacte ne peut être donnée que par une application du concept de limite.

Les concepts de limite et d'infinitésimal ne furent établis sur des bases solides qu'au début du XIX^e siècle. Le mathéma-

ticien français Augustin Cauchy (1789-1857) effectua les premiers travaux importants dans ce domaine. Avant lui, comme on l'a vu, les mathématiciens utilisaient des concepts beaucoup plus flous.

Les définitions modernes d'une limite, d'un infinitésimal – comme une suite de quantités de plus en plus petites tendant vers zéro –, d'un nombre réel, sont la conséquence du développement de l'analyse mathématique ; elles consolidèrent les résultats déjà atteints et permirent de nouveaux progrès.

II.4 Fonctions continues

Les fonctions continues forment la principale classe de fonctions avec lesquelles travaille l'analyse mathématique. Pour donner une image, une fonction continue est une fonction dont le graphe est continu, c'est-à-dire qu'on peut le tracer sans lever le crayon de la feuille de papier.

Une fonction continue représente mathématiquement une propriété que l'on rencontre souvent en pratique, correspondant au fait qu'à un petit déplacement de la variable indépendante correspond un petit déplacement de la variable dépendante (c'est-à-dire de la fonction). De beaux exemples de fonctions continues sont fournis en mécanique par les différentes lois de mouvement $s = f(t)$ exprimant la dépendance entre la position où se trouve un corps, ou si l'on préfère le chemin parcouru par un corps, et le temps. Le temps et l'espace sont continus⁴, et une loi de mouvement $s = f(t)$, d'un corps, établit une certaine relation continue entre s et t , c'est-à-dire qu'à un petit intervalle de temps correspond un petit déplacement du corps dans l'espace.

L'homme parvint à la notion abstraite de continuité en

4. Pour les auteurs, la continuité du temps et de l'espace sont des faits d'observation. En revanche, pour les conventionnalistes comme Henri Poincaré, ou longtemps avant lui Guillaume d'Ockham, ainsi que pour la plupart des physiciens de nos jours, il s'agit avant tout d'un *modèle* choisi pour sa commodité et retenu pour son efficacité. La continuité ou non du temps, en particulier, fait l'objet de débats parmi les physiciens théoriques.

observant autour de lui ce qu'on appelle les milieux continus – qu'ils soient solides, liquides ou gazeux, comme les métaux, l'eau ou l'air. En fait, comme l'on sait, les milieux continus physiques, du point de vue matériel, sont tous constitués d'un très grand nombre de particules en mouvement distinctes les unes des autres. Toutefois, ces particules et les distances entre elles sont si petites en comparaison des volumes en jeu dans les phénomènes macroscopiques que l'on étudie, que dans beaucoup de cas on peut faire, avec un excellent degré d'approximation, l'hypothèse que la substance du milieu considéré ne présente aucun saut, aucune discontinuité dans l'espace qu'elle occupe. Beaucoup de branches de la physique reposent sur cette hypothèse, en particulier l'hydrodynamique, l'aérodynamique, la magnétohydrodynamique des fluides, la théorie de l'élasticité, etc. Le concept mathématique de continuité joue naturellement dans ces disciplines, comme dans beaucoup d'autres, un rôle clé.

Prenons une fonction quelconque $y = f(x)$ et une valeur donnée de la variable indépendante, $x = x_0$. Si notre fonction reflète un certain processus continu alors aux valeurs x qui diffèrent peu de x_0 , autrement dit qui sont dans le voisinage de x_0 , doivent correspondre des valeurs de $f(x)$ dans le voisinage de $f(x_0)$. Ainsi, si l'incrément $x - x_0$ de la variable indépendante est petit, l'incrément correspondant de la variable dépendante, c'est-à-dire l'incrément $f(x) - f(x_0)$ de la fonction, doit aussi être petit. Plus techniquement, si l'incrément, appelé aussi accroissement, $x - x_0$ de la variable indépendante tend vers zéro, alors l'accroissement $f(x) - f(x_0)$ de la fonction doit, lui aussi, tendre vers zéro, ce que l'on écrit de la manière suivante :

$$\lim_{(x-x_0) \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \quad (\text{II.8})$$

Cette formule est la définition mathématique de la continuité de la fonction f au point x_0 .

La fonction $f(x)$ est dite *continue au point* x_0 si la formule II.8 est satisfaite.

Et voici la définition de la continuité sur tout un segment :

Une fonction est dite *continue sur un segment* de valeurs de la variable indépendante si elle est continue en chaque point x_0 de ce segment, c'est-à-dire si la formule II.8 est satisfaite pour tous les points du segment.

Il est remarquable que pour introduire la définition mathématique de la propriété de continuité de la fonction – qui veut dire en langage courant que son graphe est une ligne continue – il a été nécessaire de définir tout d'abord cette propriété localement, *ponctuellement* ; il a fallu définir ce que voulait dire continuité en un point (au point x_0) ; à partir de là, on a pu définir ce qu'on voulait dire par continuité sur un segment.

La définition ci-dessus, donnée pour la première fois par Cauchy au début du XIX^e siècle, a maintenant été adoptée par tout le monde en analyse mathématique. Son utilisation dans de nombreux exemples concrets a montré qu'elle convenait bien pour exprimer l'idée intuitive que nous nous faisons d'une fonction continue, par exemple, comme on l'a dit, qu'on peut la dessiner sans lever le crayon.

Comme exemples de fonctions continues nous avons les fonctions élémentaires, connues depuis l'école par le lecteur et la lectrice, x^n , $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. Toutes ces fonctions sont continues sur les segments où elles sont définies.

Si deux fonctions continues sont additionnées, soustraites, multipliées ou divisées (à condition que l'on regarde en un point où le dénominateur n'est pas nul), le résultat de l'opération est encore une fonction continue. En règle générale, dans un quotient, la continuité est violée aux valeurs de x_0 pour lesquelles la fonction du bas s'annule. Le quotient est alors une fonction *discontinue* en ces points-là.

La fonction $y = \frac{1}{x}$ (figure II.6) est un premier exemple de fonction discontinue au point $x = 0$, mais continue partout ailleurs. Nous voyons plusieurs autres exemples de fonctions discontinues en certains points sur les figures II.9a à II.9e.

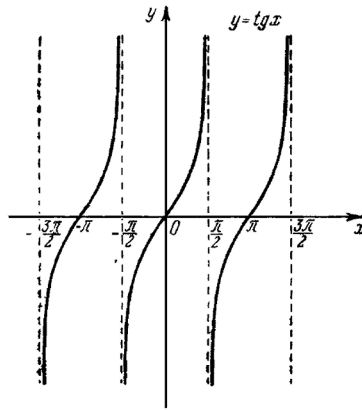
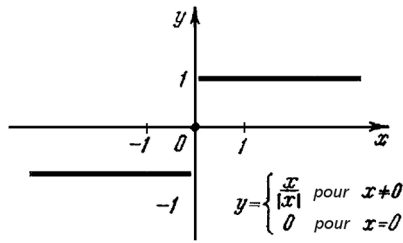
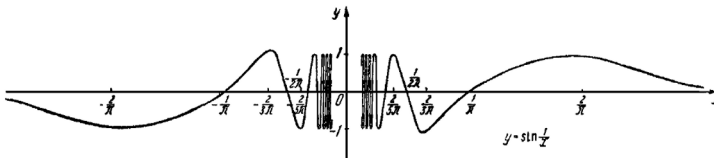
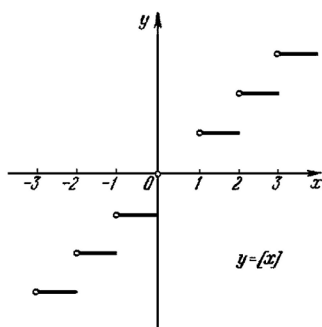
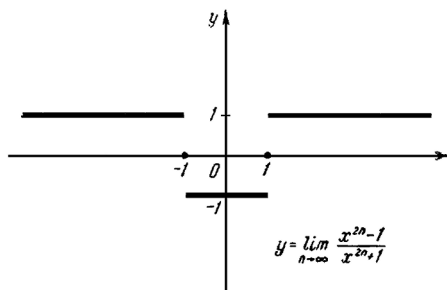


Figure II.9a : Fonction tangente.

Figure II.9b : $y = \frac{x}{|x|}$ avec une définition particulière à l'origine.Figure II.9c : $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Figure II.9d : $y = [x]$, c'est-à-dire partie entière de x .Figure II.9e : $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$ avec $y(1)$ et $y(-1) = 0$

Nous vous recommandons d'examiner attentivement ces graphes. Noter que les diverses discontinuités des fonctions sont de natures différentes : parfois quand x s'approche de x_0 , en restant du même côté, la fonction $f(x)$ s'approche d'une valeur limite, mais celle-ci peut être différente de $f(x_0)$ (cas II.9b et II.9e) ; parfois, comme dans la figure II.9c, il n'y a aucune valeur limite. Pour entrer dans le détail, observons que les choses peuvent se passer différemment selon le côté par lequel x s'approche de x_0 . Il peut arriver qu'à mesure que x s'approche de x_0 en restant toujours à droite $f(x) - f(x_0)$

tende vers zéro, mais quand x s'approche de x_0 par l'autre côté $f(x) - f(x_0)$ ne tende pas vers zéro (cas II.9d). Dans ce cas, bien sûr, la fonction a une discontinuité en x_0 , néanmoins on peut dire que la fonction est « continue à droite ». Les graphes illustrent tous ces cas de figure.

Comme exercice, nous invitons le lecteur et la lectrice à répondre eux-mêmes aux questions suivantes : quelle valeur doit-on donner à chacune des fonctions $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\frac{x^3-1}{x-1}$, $\frac{\tan x}{x}$, là où elle n'est pas définie, car le dénominateur s'annule, afin de la rendre continue là aussi ? Peut-on faire la même chose avec les fonctions $\tan x$, $\frac{1}{x-1}$, $\frac{x-2}{x^2-4}$?

Les fonctions discontinues en mathématiques correspondent à de nombreux processus dans la nature présentant un saut. Lors d'un choc par exemple, la vitesse d'un corps change avec une discontinuité. De nombreuses transitions qualitatives se déroulent avec des sauts. Dans la section II.2 nous avons donné l'exemple de la fonction $Q = f(t)$ exprimant la dépendance entre la quantité de chaleur contenue dans une masse donnée d'eau (ou de glace) et la température. Au point de fusion de la glace, il y a un changement qualitatif, et la quantité de chaleur $Q = f(t)$ en fonction de la température t change avec un saut.

Les fonctions présentant quelques sauts sont, à côté des fonctions continues, très fréquentes en analyse.

Un exemple de fonction plus compliquée, avec un nombre infini de sauts, est la fonction de Riemann, qui vaut zéro en tous les points d'abscisse irrationnelle, et $\frac{1}{q}$ en les points d'abscisse rationnelle $x = \frac{p}{q}$ (où on a pris la fraction irréductible représentant x). Cette fonction est discontinue en tous les points rationnels, et continue en tous les points irrationnels. Avec une légère modification, on produit aisément un exemple de fonction discontinue partout. Il suffit par exemple de prendre cette fonction de Riemann, et là où elle valait zéro de lui donner la valeur un.

Notons que même pour des fonctions compliquées comme les deux exemples ci-dessus, l'analyse moderne révèle des propriétés intéressantes. Elles sont étudiées par l'une des branches

de l'analyse qui a pris un essor propre : la théorie des fonctions d'une variable réelle (qui sera le sujet du chapitre XV dans le volume 3). Des contributions importantes à cette théorie, qui s'est rapidement développée durant la première moitié du XX^e siècle, ont été faites par les mathématiciens soviétiques, en particulier ceux de l'École de Moscou de la théorie des fonctions.

II.5 Dérivée

Le concept fondamental suivant en analyse est le concept de *dérivée*. Examinons deux problèmes dont historiquement la solution a conduit à ce concept.

Vitesse. Dans l'introduction du chapitre, nous avons déjà calculé la vitesse d'un objet en chute libre. Dans ce cas-là, nous avons utilisé un passage à la limite pour aller de la vitesse moyenne sur un court intervalle de temps à la vitesse à un moment précis, où se trouve l'objet à ce moment-là. La même astuce peut servir pour la détermination de la vitesse instantanée dans un mouvement irrégulier quelconque. En effet, soit la fonction

$$s = f(t) \tag{II.9}$$

représentant la dépendance entre la position s d'un point matériel en mouvement et le temps t . Afin de trouver la vitesse au moment $t = t_0$ (on dira aussi fréquemment au « temps » ou à la « date » $t = t_0$), considérons une certaine période de temps entre t_0 et $t_0 + h$ ($h \neq 0$). Au cours de cette période le point parcourt le chemin

$$\Delta s = f(t_0 + h) - f(t_0)$$

La vitesse moyenne v_m durant cette période va dépendre de l'accroissement h

$$v_m = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{h} \{f(t_0 + h) - f(t_0)\}$$

et plus h sera petit, plus cette vitesse moyenne représentera ce que nous concevons comme la « vraie vitesse » au moment

t_0 . Il s'ensuit que cette vraie vitesse au temps t_0 , appelée plus formellement la *vitesse instantanée* à ce moment-là, est égale *par définition* à la limite

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

liant l'accroissement du chemin et l'accroissement du temps, quand ce dernier tend vers zéro, sans toutefois jamais l'atteindre.

Pour calculer la vitesse dans différentes lois de mouvement, il nous reste à apprendre comment trouver cette limite pour différentes fonctions $f(t)$.

Tangente. La détermination d'une limite tout à fait similaire conduit à la résolution d'un autre problème, cette fois géométrique : tracer la tangente (au sens de déterminer l'équation de la tangente) à une courbe plane quelconque en n'importe lequel de ses points.

Soit une courbe C , graphe de la fonction $y = f(x)$, et un point A sur cette courbe à l'abscisse x_0 (fig. II.10).

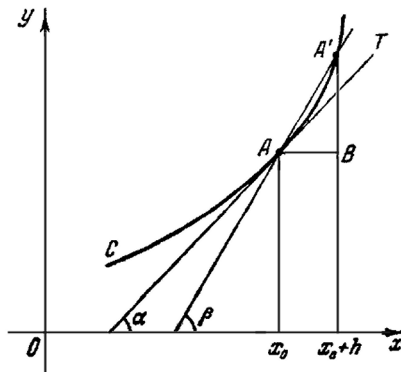


Figure II.10 : Tangente T à une courbe.

Quelle ligne droite appelle-t-on la tangente à C au point A ? En géométrie élémentaire la question ne se pose pas. Pour la

seule ligne courbe que l'on y étudie – le cercle – la tangente en un point est définie, sans avoir besoin d'une analyse subtile, comme la droite passant par ce point et n'en ayant aucun autre en commun avec le cercle. Pour d'autres courbes, une telle définition ne correspondra manifestement pas toujours à l'idée que l'on se fait d'un « contact tangent ». Si l'on regarde les deux droites L et M sur la figure II.11, on voit tout de suite que la première n'est pas tangente à la courbe (une sinusoïde), bien qu'elle n'ait qu'un seul point en commun avec elle, et que la seconde qui a plusieurs points de contact avec la courbe est néanmoins la tangente en chacun d'entre eux.

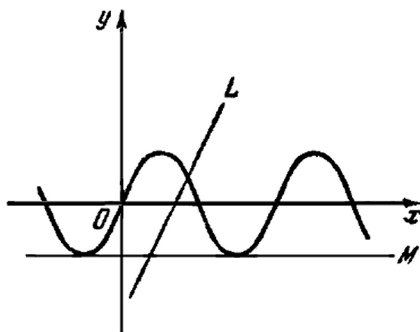


Figure II.11 : Tangente à une courbe (suite).

Afin de donner une définition de la droite tangente, regardons à nouveau la courbe C sur la figure II.10. En plus du point A , considérons un autre point A' , distinct de A , à l'abscisse $x_0 + h$. Traçons la sécante AA' et désignons par la lettre β l'angle qu'elle fait avec l'axe des x . On va maintenant, tout en restant sur la courbe C , rapprocher le point A' du point A . Si, quand on procède ainsi, la sécante AA' tend vers une certaine position limite, alors nous appelons la droite T qui a cette position limite la *tangente* au point A . On voit aussi que l'angle α que fait la droite T avec l'axe des x doit être égal à la limite de l'angle β .

Il est aisé de voir à l'aide du triangle rectangle ABA' (figure II.10) que $\tan \beta$ peut être exprimée comme ceci

$$\tan \beta = \frac{BA'}{AB} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Et donc à la limite on doit avoir

$$\tan \alpha = \lim_{A' \rightarrow A} \tan \beta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

c'est-à-dire que la tangente (au sens trigonométrique) de l'angle que fait la tangente (au sens géométrique) avec l'axe des x est égale à la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction $f(x)$ et l'accroissement de la variable indépendante x au point x_0 , quand ce dernier accroissement tend vers zéro, sans jamais l'atteindre.

Voici un autre exemple où il s'agit encore en définitive de trouver la limite d'un ratio d'accroissements. Dans un fil conducteur circule un courant électrique d'intensité variable. Supposons que l'on connaisse la fonction $Q = f(t)$ représentant la quantité d'électricité (en coulomb) qui a traversé une section transversale fixe du fil jusqu'au temps t . Pendant l'intervalle de temps entre t_0 et $t_0 + h$ passe à travers cette section une quantité d'électricité ΔQ , égale à $f(t_0 + h) - f(t_0)$. L'intensité moyenne (en ampère) est donc

$$I_m = \frac{\Delta Q}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

La limite de ce ratio quand $h \rightarrow 0$ nous donne l'intensité au temps t_0

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Les trois exemples que nous venons de regarder, bien qu'ils appartiennent à des domaines de la science très différents – la mécanique, la géométrie et l'électricité – nous ont conduits à devoir effectuer la même opération mathématique sur une certaine fonction. Il s'est agi chaque fois de trouver la limite du quotient entre l'accroissement de la fonction, correspondant

à un accroissement h de la variable indépendante, et h lui-même, quand $h \rightarrow 0$.

On pourrait donner une kyrielle d'autres exemples qui se ramèneraient dans chaque cas à la même opération. Nous mène aussi à elle, par exemple, la question de la vitesse d'une réaction chimique, ou celle de la densité d'un corps dont la masse n'est pas homogène, etc. Étant donné le rôle exceptionnellement important que joue en mathématiques cette opération sur les fonctions, elle a reçu un nom particulier : c'est l'opération de *différentiation*. Le résultat de l'opération s'appelle la fonction dérivée ou simplement la *dérivée*.

Ainsi, la *dérivée de la fonction* $y = f(x)$, ou plus précisément la *valeur de la dérivée au point donné* x , est la limite, si elle existe, vers laquelle tend le ratio entre l'accroissement de la fonction, $f(x+h) - f(x)$, et l'accroissement h de la variable indépendante, quand h tend vers zéro. (Quand la limite n'existe pas, on dit que la fonction f n'a pas de dérivée à cet endroit-là.) Souvent on utilise les notations Δx pour l'accroissement h , et Δy pour l'accroissement $f(x+h) - f(x)$. Alors la définition de la dérivée s'écrit plus simplement :

$$\text{dérivée de } f \text{ au point } x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La valeur de la dérivée dépend manifestement du point x auquel on la considère. La dérivée de la fonction $y = f(x)$ est donc elle-même une certaine fonction de la variable indépendante x ⁵. La dérivée est habituellement notée

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Mentionnons aussi les autres notations courantes pour la dérivée :

$$\frac{df(x)}{dx}, \text{ ou } \frac{dy}{dx}, \text{ ou } y', \text{ ou } y'_x$$

Il faut observer que dans les deux premières notations ci-dessus, la notation pour la dérivée ressemble à un ratio, par

5. On utilise souvent aussi pour la dérivée de f au point x l'expression très explicite de *taux de variation* de f au point x .

exemple $\frac{dy}{dx}$, mais il ne faut pas voir cette notation comme un ratio ; elle doit être vue comme un signe global signifiant la dérivée. Dans la section II.8 le numérateur et le dénominateur de cette « fraction » vont acquérir pour nous une signification indépendante, et leur ratio va effectivement coïncider avec la dérivée, ce qui justifiera a posteriori cette façon d'écrire.

Les résultats des exemples présentés jusqu'ici peuvent être reformulés comme suit.

La vitesse d'un point dont la position s sur une trajectoire unidimensionnelle est donnée par la fonction $s = f(t)$ est égale à la dérivée de cette fonction :

$$v = s' = f'(t)$$

En bref : la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.

La tangente (au sens trigonométrique) de l'angle que fait la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse x est égale à la dérivée de la fonction $f(x)$ en ce point :

$$\tan \alpha = y' = f'(x)$$

L'intensité I du courant électrique au temps t , à travers une section transversale donnée d'un fil conducteur, si $Q = f(t)$ représente la quantité d'électricité qui a traversé cette section entre un temps 0 et le temps t , est égale à la dérivée de Q par rapport au temps t :

$$I = Q' = f'(t)$$

Le point suivant doit être souligné. Dans un mouvement irrégulier, la « vitesse à un moment donné », qu'on a appelé la « vitesse instantanée », est un concept numérique qui est né de la pratique. L'homme est arrivé à ce concept à la suite de nombreuses observations sur des mouvements concrets variés. L'étude du mouvement non uniforme d'un corps en divers endroits de sa trajectoire, la comparaison de nombreux mouvements comparables se déroulant simultanément, en particulier, l'étude des phénomènes de collision entre corps, tout ceci

constitue l'expérience accumulée qui conduisit, dans un mouvement irrégulier, à l'élaboration du concept physique de vitesse instantanée. Mais une définition précise de cette vitesse doit nécessairement inclure une méthode pour déterminer sa valeur numérique. Cela devient possible à l'aide du concept de dérivée.

En mécanique, la valeur de la vitesse⁶ instantanée au temps t d'un corps se déplaçant selon la loi $s = f(t)$ est *par définition* la dérivée de la fonction $f(t)$ au temps t .

Le raisonnement au début de la section II5 a montré non seulement la commodité de l'introduction de l'opération de dérivation, mais aussi qu'il était raisonnable de choisir la définition ci-dessus pour la vitesse instantanée à un moment donné.

Ainsi, quand nous nous sommes posé la question de trouver la vitesse instantanée d'un point qui suivait un mouvement irrégulier, nous avons en fait seulement une conception intuitive expérimentale de sa valeur, mais pas de définition précise. Après analyse, nous sommes parvenus à la définition exacte de la vitesse instantanée : c'est la dérivée de la position par rapport au temps. Cela a une importance pratique capitale, puisque c'est avec cette définition que notre idée intuitive expérimentale a été transformée en quelque chose de clair et calculable.

Ce qu'on vient de dire s'applique bien sûr aussi à l'intensité électrique et à de nombreux autres concepts mesurant la vitesse de déroulement d'un phénomène (physique, chimique, etc.).

L'exemple que nous avons examiné – la vitesse instantanée d'un corps en mouvement non uniforme – sert d'illustration générique pour de nombreux phénomènes du même genre, où l'expérience pratique conduit à un certain concept qui a un

6. Vitesse et vitesse sont des termes presque synonymes. En mathématiques, techniquement, la vitesse se réfère à la grandeur vectorielle, avec une direction, un sens, tandis que la vitesse est seulement la valeur absolue, c'est-à-dire le module, du vecteur vitesse. Quand la distinction n'a pas lieu d'être, nous les utilisons indifféremment.

sens dans la réalité (vitesse, travail, densité, surface, etc.). Les mathématiques aident à définir clairement des concepts intuitifs, après quoi nous avons la possibilité de les utiliser dans les calculs qu'on a besoin de faire.

Nous avons déjà souligné au début du chapitre que le concept de dérivée est né de l'effort, au cours de nombreux siècles, pour trouver la tangente à une courbe⁷ et la vitesse instantanée d'un corps en mouvement irrégulier. Depuis l'Antiquité, les mathématiciens se sont intéressés à ces deux problèmes, ainsi qu'au problème du calcul d'une surface délimitée par une courbe que nous allons aborder ensuite. Pourtant encore au XVI^e siècle la formulation de tels problèmes et leur résolution, quand elles étaient possibles, étaient spécifiques, au cas par cas. La vaste expérience accumulée dans ce domaine fut systématisée et transformée en une théorie au XVII^e siècle dans les travaux de Newton et Leibniz. Au siècle suivant Euler fit de grandes contributions à la construction de la l'analyse moderne.

Cependant, Newton et Leibniz et leurs contemporains logiquement fournirent peu de justifications rigoureuses à ces grandes innovations mathématiques ; dans les méthodes de raisonnement et les concepts qu'ils employaient, à notre point de vue on peut trouver beaucoup à redire ; et même les mathématiciens de leur époque en avaient conscience, comme le révèlent les discussions enflammées sur ces sujets que contiennent leurs correspondances épistolaires. Les mathématiciens de cette époque (XVII^e et XVIII^e siècles) associaient étroitement leurs travaux mathématiques théoriques avec leurs recherches appliquées dans différents domaines de la nature (physique, mécanique, chimie, technologie). La formulation d'un problème mathématique provenait toujours de besoins pratiques ou du désir de comprendre un phénomène naturel. Quand le problème avait été résolu, on vérifiait d'une manière ou d'une autre que la solution était correcte, et c'est ainsi qu'était sti-

7. C'est-à-dire, au-delà de son simple tracé soigneux avec une règle et un crayon sur un dessin, trouver des propriétés de cette tangente ; en géométrie analytique, trouver son équation $ax + by + c = 0$.

mulée et guidée la recherche mathématique.

Exemples de calculs de dérivées. La définition de la dérivée de f comme la limite du ratio $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h \rightarrow 0$ offre la possibilité, pour chaque fonction particulière, de trouver sa dérivée.

Il faut tout de suite signaler, toutefois, qu'il peut y avoir des cas où une fonction en un point ou un autre ou même en de nombreux points n'est tout simplement pas dérivable, c'est-à-dire quand $h \rightarrow 0$ que le ratio $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ne tend pas vers quelque limite que ce soit. Le cas se présente bien sûr en n'importe quel point où la fonction $f(x)$ est discontinue, puisqu'en un tel point dans la fraction

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{II.10})$$

le numérateur ne tend pas vers zéro tandis que le dénominateur décroît indéfiniment. Mais la dérivée peut ne pas exister non plus même en un point où la fonction est continue. Un exemple simple est le point où le graphe fait un coude sur la figure II.12.

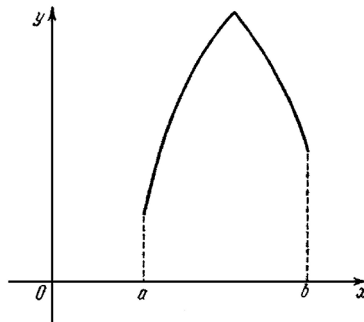


Figure II.12 : Il n'y a pas de dérivée où le graphe fait un coude.

En ce point-là le graphe de la courbe n'a pas de tangente ; et donc la fonction n'a pas de dérivée. Souvent en de tels points

l'expression (II.10) s'approche d'une valeur ou d'une autre selon que h tend vers zéro par la droite ou par la gauche. Donc selon la définition d'une limite, où h doit s'approcher arbitrairement de zéro, l'expression (II.10) n'en a simplement pas. Un exemple plus compliqué de cas d'absence de dérivée est donné par la fonction

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{quand } x \neq 0 \\ 0 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est montré sur la figure II.13. Au point $x = 0$ elle n'a pas de dérivée parce que, comme on peut le voir sur le graphe, dans ce cas la sécante OA ne tend pas vers une certaine position fixe quand $A \rightarrow 0$ même en restant d'un seul côté. La sécante OA oscille constamment entre les droites OM et OL . Par conséquent l'expression (II.10) n'a pas de limite, pas même de limite à droite ou de limite à gauche.

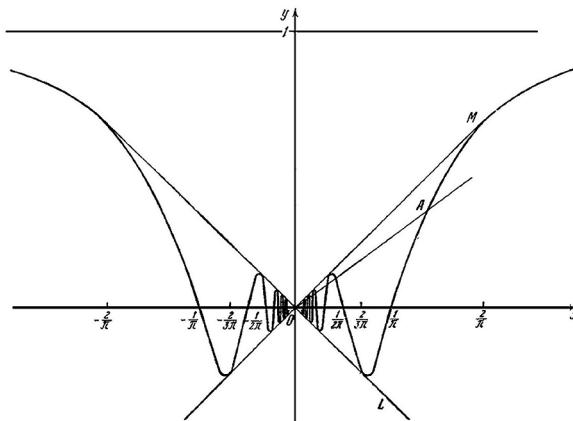


Figure II.13 : Fonction sans tangente au point zéro, pas même par la droite ou par la gauche.

Notons, enfin, qu'on peut définir de manière purement analytique, à l'aide d'une formule, une fonction continue par-

tout mais différentiable nulle part. Un exemple de fonction de ce genre a été donné pour la première fois par l'éminent mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897).

La classe des fonctions différentiables est, par conséquent, nettement plus petite que la classe des fonctions continues.

Passons maintenant au calcul effectif des dérivées des fonctions les plus simples :

1) $y = c$, où c est une constante. Une constante peut être considérée comme un cas particulier de fonction $f(x)$ qui prend toujours la même valeur quel que soit x . Son graphe est une droite parallèle à l'axe des x à la hauteur c au-dessus ou en dessous de cet axe. Cette ligne droite fait un angle $\alpha = 0$ avec l'axe des x , et sa dérivée est manifestement toujours égale à zéro : $y' = (c)' = 0$. En mécanique, cette égalité signifie que la vitesse d'un point fixe est nulle.

$$2) y = x^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Quand $h \rightarrow 0$ (mais sans jamais lui être égal) nous obtenons la limite $2x$. Par conséquent

$$y' = (x^2)' = 2x$$

$$3) y = x^n \text{ (avec } n \text{ un nombre entier positif)}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (4)$$

$$= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n}{h} \quad (5)$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}$$

Tous les termes, à partir du deuxième, tendent vers zéro quand $h \rightarrow 0$, donc

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Cette formule reste vraie pour n'importe quel nombre n , positif ou négatif, rationnel ou même irrationnel, bien qu'on le démontre différemment. Nous utiliserons ce résultat général sans le démontrer. Ainsi par exemple

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{pour } x > 0)$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

$$(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1} \quad (\text{pour } x > 0)$$

4) $y = \sin x$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Mais, comme on l'a vu dans la section II.3 lors de l'étude de la fonction $\frac{\sin x}{x}$, quand $h \rightarrow 0$ la première fraction tend vers l'unité ; quant à $\cos \left(x + \frac{h}{2}\right)$ cela tend clairement vers $\cos x$. Nous avons donc établi que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

Nous laissons au lecteur et à lectrice le soin de démontrer de la même manière que

$$(\cos x)' = -\sin x$$

5) Dans la section II.3 nous avons aussi montré (pages 166-167) l'existence de la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots$$

Nous avons déjà signalé, lors de l'étude de cette limite, que le fait que n soit un nombre parcourant les entiers positifs ne joue pas un rôle important. Ce qui est important c'est qu'une quantité infinitésimale $\frac{1}{n}$ soit ajoutée à l'unité dans les parenthèses, et que l'exposant n , qui peut être un nombre réel positif ou même négatif, croisse en valeur absolue vers $+\infty$ en restant l'inverse de l'infinitésimal.

Acceptant ce fait, il est facile de trouver la dérivée de la fonction logarithme en base a , notée $y = \log_a x$

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

La continuité de la fonction logarithme nous permet de remplacer la quantité variable sur laquelle porte le logarithme par la limite de cette quantité variable, qui est égale à e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$$

(ici le rôle de n tendant vers l'infini est joué par la quantité $\frac{x}{h}$). Nous parvenons ainsi à la règle de différentiation de la fonction logarithme en base a

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

Cette règle devient particulièrement simple si pour la base a nous prenons le nombre e lui-même. Le logarithme dans cette base s'appelle le *logarithme naturel* et est noté $\ln x$ ⁸. On peut écrire

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

autrement dit

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

8. On dit aussi « logarithme népérien », du nom de son inventeur, l'Écossais Jean Neper – ou John Napier – (1550-1617).

II.6 Règles de différentiation

On pourrait penser, au vu des différents exemples précédents, que le calcul d'une dérivée demande chaque fois la création d'une nouvelle méthode. Ce n'est pas le cas. Le développement de l'analyse a été grandement simplifié parce qu'il a été possible de mettre au point une méthode simple et unique permettant de trouver la dérivée de n'importe quelle fonction « élémentaire » (c'est-à-dire une fonction qui peut être exprimée à l'aide d'une combinaison finie d'opérations algébriques de base, de fonctions trigonométriques, de puissances et de logarithmes). Cette méthode repose sur ce qu'on appelle les *règles de différentiation*. Elles consistent en une petite collection de théorèmes permettant de ramener des problèmes compliqués à des simples.

Nous allons exposer ici ces règles de différentiation, en essayant de rester concis dans la démonstration qu'on va en donner. Si le lecteur ou la lectrice a seulement pour objectif, en lisant ce chapitre, de prendre connaissance des idées générales de l'analyse, il ou elle peut sauter cette section, gardant simplement à l'esprit qu'il existe un moyen effectif pour trouver la dérivée de n'importe quelle fonction élémentaire. Dans ce cas, bien sûr, il faudra nous croire sur parole pour certaines étapes de calcul dans les exemples qui serviront d'illustrations par la suite.

Dérivée d'une somme. Supposons que y soit la fonction de x donnée par la somme

$$y = \phi(x) + \psi(x)$$

où $u = \phi(x)$ et $v = \psi(x)$ sont des fonctions connues de x . Supposons en outre que nous soyons capables de trouver les dérivées de u et de v . Comment trouver la dérivée de y ? La réponse est simple

$$y' = (u + v)' = u' + v' \quad (\text{II.11})$$

En effet, ajoutons à x un incrément, encore appelé accroissement, Δx , alors u , v et y vont respectivement s'accroître de

Δu , Δv et Δy , liés par l'égalité

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(comme toujours Δx est différent de zéro). En passant à la limite, c'est-à-dire en faisant tendre Δx vers zéro, on arrive à l'équation (II.11), sauf bien sûr si les fonctions u ou v elles-mêmes ne sont pas dérivables au point x .

De façon analogue la règle de différentiation pour la différence entre deux fonctions est

$$(u - v)' = u' - v' \quad (\text{II.12})$$

Dérivée d'un produit. Légèrement plus compliquée est la règle de différentiation d'un produit. La dérivée du produit de deux fonctions dérivables existe et est égale à la somme du produit de la première par la dérivée de la seconde plus le produit de la seconde par la dérivée de la première, autrement dit en notations algébriques

$$(uv)' = uv' + vu' \quad (\text{II.13})$$

En effet, ajoutons à nouveau à x un accroissement Δx . Les fonctions u , v et $y = uv$ vont s'accroître respectivement de Δu , Δv et Δy , qui satisfont la relation

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Après passage à la limite quand $\Delta x \rightarrow 0$, les deux premiers termes du côté droit donnent le membre de droite de l'équation (II.13) et le troisième terme disparaît. (Il s'annihile quand $\Delta x \rightarrow 0$ parce que c'est le produit de la fraction $\frac{\Delta v}{\Delta x}$

qui tend vers une limite finie, égale à la dérivée de v , dont nous avons par hypothèse supposé l'existence, et de l'accroissement Δu qui tend vers 0. Ce dernier élément Δu tend, en effet, vers zéro tout simplement car u a une dérivée u' et donc a fortiori est continue.) Donc à la limite l'équation ci-dessus donne la règle (II.13).

Un cas particulier, quand $v = c =$ constante, est

$$(cu)' = cu' + uc' = cu' \quad (\text{II.14})$$

puisque la dérivée d'une constante est zéro.

Dérivée d'un quotient. Supposons que $y = \frac{u}{v}$, où u et v sont des fonctions toutes deux en un point donné x dérivables, et où $v \neq 0$ en ce point-là. Suivant notre procédure habituelle, on peut tout de suite écrire

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v} \rightarrow \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad \text{quand } \Delta x \rightarrow 0$$

Ici nous avons encore une fois utilisé le fait que pour la fonction v , qui est dérivable par hypothèse, on a nécessairement $\Delta v \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$. On est ainsi arrivés à la règle pour un quotient

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (\text{II.15})$$

Voici quelques exemples d'application pratique des règles que nous venons d'établir :

$$(2x^3 - 5)' = 2(x^3)' - (5)' = 2 \cdot 3x^2 - 0 = 6x^2$$

$$(x^2 \sin x)' = x^2(\sin x)' + (x^2)' \sin x = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = (7) \\
 &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
 \end{aligned}$$

Nous invitons le lecteur et la lectrice à démontrer eux-mêmes la formule ci-dessous⁹ :

$$(\cot x)' = -\operatorname{csc}^2 x$$

Dérivée de la fonction inverse. Considérons une fonction $y = f(x)$ continue et croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $[a, b]$. Cela signifie qu'à mesure que x augmente dans l'intervalle $[a, b]$, la valeur de y augmente (resp. diminue), voir figure II.14.

Soit $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Sur la figure II.14, on voit qu'à chaque valeur y sur l'intervalle $[c, d]$ (resp. $[d, c]$), correspond une valeur et une seule x sur l'intervalle $[a, b]$, telle que $y = f(x)$. Ainsi nous pouvons définir sur l'intervalle $[c, d]$ (resp. $[d, c]$) une fonction $x = \phi(y)$, qui s'appelle la *fonction inverse* de la fonction $y = f(x)$ (à ne pas confondre avec la fonction $y = \frac{1}{f(x)}$). Sur la figure II.14 on peut observer visuellement que la fonction $\phi(y)$ est continue. Néanmoins, en analyse moderne, on le démontre proprement avec un raisonnement analytique rigoureux. Soit maintenant Δx et Δy deux incréments en correspondance l'un avec l'autre dans la relation bijective entre x et y . Il est clair que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}, \quad \text{si } \Delta y \neq 0$$

En passant à la limite cela nous donne la relation très simple entre la dérivée de la première fonction et celle de son inverse :

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \tag{II.16}$$

9. Rappel : sec est la notation standard pour sécante, c'est-à-dire l'inverse du cosinus ; cot signifie cotangente, c.-à-d. l'inverse de la tangente ; et csc signifie cosécante, c.-à-d. l'inverse du sinus.

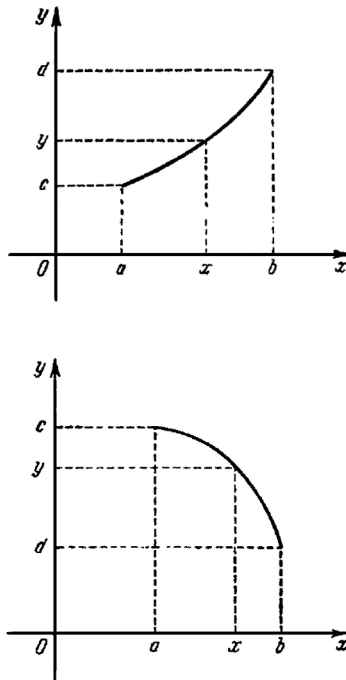


Figure II.14 : Fonction $y = f(x)$ et son inverse $x = \phi(y)$. En haut cas où f est une fonction croissante ; en bas cas où f est une fonction décroissante.

Utilisons la relation (II.16) pour trouver la dérivée de la fonction $y = a^x$. Nous pouvons différencier sa fonction inverse $x = \log_a y$, ce qui permet d'écrire

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = y \log_e a = a^x \ln a \quad (\text{II.17})$$

En particulier $(e^x)'_x = e^x$.

Autre exemple : $y = \arcsin x$. La fonction inverse est $x = \sin y$. On en déduit

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tableau de dérivées. Listons les dérivées des fonctions élémentaires les plus simples :

y	y'	y	y'	y	y'
c	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\tan x$	$\sec^2 x$
x^a	ax^{a-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Nous avons établi et expliqué toutes ces formules, à l'exception des deux dernières à droite que le lecteur ou la lectrice peuvent établir par eux-mêmes en utilisant la règle de différentiation de la fonction inverse.

Trouver la dérivée d'une fonction de fonction (ce qu'on appelle une fonction composée). Nous arrivons à la dernière et la plus compliquée des règles de différentiation. Celui ou celle qui maîtrise cette règle ainsi que le tableau précédent peut à juste titre dire qu'il sait différentier n'importe quelle fonction élémentaire.

Pour utiliser la règle que nous allons présenter, il faut se figurer comment la fonction que l'on veut différentier a été construite ; avec quelles opérations, dans quel ordre, partant de la variable indépendante x , on est arrivé à la variable dépendante finale y .

Par exemple pour calculer la fonction

$$y = \sin^2 x$$

il faut commencer par trouver le sinus de x , puis prendre

son carré. On peut noter les deux étapes ainsi : $y = u^2$ où $u = \sin x$.

Voici d'autres exemples :

- 1) $y = (3x + 4)^3, \quad y = u^3, \quad u = 3x + 4$
- 2) $y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = u^{1/2}, \quad u = 1 - x^2$
- 3) $y = e^{kx}, \quad y = e^u, \quad u = kx$

Dans des cas plus compliqués, nous avons une chaîne de dépendances élémentaires comportant plus d'étapes. Par exemple

$$4) \quad y = \cos^3 x^2, \quad y = u^3, \quad u = \cos v \quad v = x^2$$

Si y est une fonction de la variable u

$$y = f(u) \tag{II.18}$$

et u est elle-même une fonction de la variable x

$$u = \phi(x) \tag{II.19}$$

alors y , étant une fonction de u , est une certaine fonction de x , que l'on note comme ceci :

$$y = F(x) = f[\phi(x)] \tag{II.20}$$

On peut imaginer plus d'étapes et former par exemple la fonction

$$y = \Phi(x) = f\{\phi[\psi(x)]\}$$

qui est équivalente à

$$y = f(u), \quad u = \phi(v), \quad v = \psi(x)$$

Il n'y a pas de limitation dans le nombre fini d'étapes élémentaires qu'on peut imaginer.

Passons maintenant à la façon de calculer la dérivée de la fonction $F(x)$, définie par l'expression (II.20), quand on connaît la dérivée de $f(u)$ par rapport à u et la dérivée de $\phi(x)$ par rapport à x .

Comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, donnons à x un accroissement Δx , alors u , par l'équation (II.19), reçoit

un certain accroissement Δu , et à son tour y , par l'équation (II.18), reçoit un certain accroissement Δy . On peut écrire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Faisons maintenant tendre Δx vers zéro. Alors on a $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'_x$. De plus, étant donné que la fonction u est continue (puisqu'elle est même dérivable) au point $u(x)$, son accroissement Δu tend vers zéro, et donc $\frac{\Delta y}{\Delta u} \rightarrow y'_u$ (l'existence des dérivées y'_u et u'_x a été posée par hypothèse).

Ainsi est démontrée l'importante formule pour la dérivée d'une fonction de fonction

$$y'_x = y'_u u'_x \quad (\text{II.21})$$

Noter que dans la démonstration de cette formule on a fait l'hypothèse implicite, quand Δx tendait vers zéro, que Δu restait tout le temps différent de zéro. En fait, même sans cette hypothèse, on montre aisément que la formule (II.21) est encore vraie.

À l'aide de la formule (II.21) et du tableau des dérivées élémentaires, à titre d'illustration calculons les dérivées des quatre fonctions composées données en exemple plus haut :

$$\begin{aligned} 1) \quad y = (3x + 4)^3 = u^3, \quad y'_x &= (u^3)'_u (3x + 4)'_x \\ &= 3u^2 \cdot 3 = 9(3x + 4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y = \sqrt{1 - x^2} = u^{\frac{1}{2}}, \quad y'_x &= \left(u^{\frac{1}{2}}\right)'_u (1 - x^2)'_x \\ &= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad y = e^{kx} = e^u, \quad y'_x &= (e^u)'_u u'_x = e^u \cdot k \\ &= k e^{kx} \end{aligned}$$

Si $y = f(u)$, $u = \phi(v)$ et $v = \phi(x)$, alors

$$y'_x = y'_u u'_x = y'_u (u'_v v'_x) = y'_u u'_v v'_x$$

Il est clair que cette formule se généralise à un nombre quelconque (fini) de fonctions en chaîne.

Considérons le quatrième exemple où la composition est un peu plus compliquée :

$$\begin{aligned} 4) \quad y = \cos^3 x^2, \quad y'_x &= (u^3)'_u (\cos v)'_v \cdot (x^2)'_x \\ &= 3u^2 (-\sin v) \cdot 2x \\ &= -6x \cos^2 x^2 \sin x^2 \end{aligned}$$

Pour expliquer comment calculer les dérivées des fonctions composées, nous avons introduit des variables intermédiaires u, v, \dots . En réalité, avec un peu de pratique, vous n'aurez plus besoin de les écrire, les gardant simplement à l'esprit pendant les calculs.

Fonctions élémentaires. Pour conclure cette section II.6, remarquons que les fonctions, dont la liste des dérivées a été donnée plus haut sous forme de tableau, sont les fonctions élémentaires les plus simples. Elles peuvent servir de base pour la définition de toutes les fonctions dites élémentaires. À partir de l'ensemble des fonctions de base, faire toutes les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division, avec le caveat habituel sur la division par zéro) et toutes les compositions possibles, incorporer les nouvelles fonctions obtenues à l'ensemble de base et continuer : l'ensemble ainsi formé est par définition l'ensemble des fonctions *élémentaires*.

Par exemple, le polynôme $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ est une fonction élémentaire, puisqu'on l'obtient avec quelques fonctions puissances et l'addition, la soustraction et la multiplication. La fonction $\ln \sqrt{1 - x^2}$ est aussi élémentaire puisqu'on l'obtient en partant du polynôme $u = 1 - x^2$ sur lequel on applique la fonction $v = u^{\frac{1}{2}}$, puis la fonction $\ln v$.

Les règles de différentiation qu'on vient d'étudier suffisent pour trouver la dérivée de n'importe quelle fonction élémentaire quand on connaît les dérivées des fonctions élémentaires les plus simples.

II.7 Maximums et minimums. Exploration du graphe d'une fonction

L'une des applications les plus simples et les plus importantes de la dérivée est l'étude des maximums et minimums. Supposons que sur un certain segment $a \leq x \leq b$ on ait une fonction $y = f(x)$, que nous supposons par hypothèse non seulement continue mais dérivable en tout point.

La possibilité de calculer une dérivée en chaque point permet d'imaginer clairement le cheminement le long du graphe de la fonction. Là où la dérivée est toujours positive, la tangente au graphe reste inclinée vers le haut. Dans ces portions la fonction augmente : à une valeur plus grande de x correspond une valeur plus grande de $f(x)$. Là où la dérivée est toujours négative, la fonction au contraire diminue ; le graphe descend.

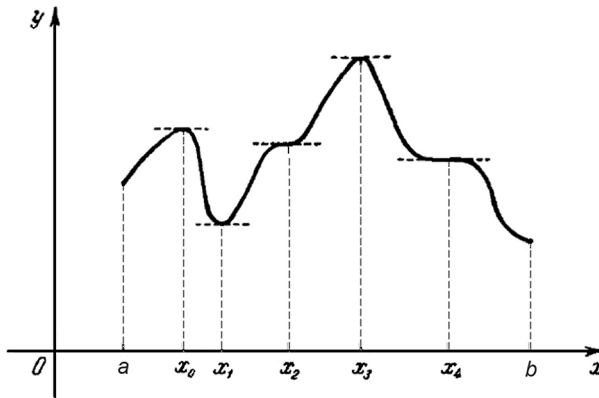


Figure II.15 : Étude des maximums et minimums d'une fonction.

Maximums et minimums. Sur la figure II.15 est représenté le graphe de la fonction $y = f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$. Certains points du graphe présentent un intérêt particulier, nous voulons parler tout d'abord des points d'abscisse x_0, x_1 et x_3 .

On dit qu'au point x_0 la fonction $f(x)$ a un *maximum local* ; on veut dire par là qu'en ce point la fonction $f(x)$ est plus grande qu'aux points dans le voisinage de x_0 , plus précisément $f(x_0) \geq f(x)$ pour tous les points x dans un certain segment entourant le point x_0 .

On définit de façon analogue un *minimum local*.

Pour notre fonction, des maximums locaux sont atteints aux points d'abscisse x_0 et x_3 , et un minimum local est atteint au point d'abscisse x_1 .

En chaque point maximum ou minimum, s'il s'agit d'un point strictement à l'intérieur du segment $[a, b]$, c'est-à-dire s'il ne coïncide pas avec une des bornes a ou b , la dérivée doit être égale à zéro.

Cette dernière assertion particulièrement importante découle de la définition même de la dérivée en un point x comme limite du ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. En effet, si on se déplace légèrement sur l'axe des x par rapport à un point dont l'abscisse correspond à un maximum local, on a $\Delta y < 0$. Par conséquent pour un incrément Δx positif le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est négatif ou nul, et pour un incrément Δx négatif le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est positif ou nul. La limite de ce ratio, qui par hypothèse existe, ne peut être ni strictement positive ni strictement négative ; la seule valeur qui reste est zéro. Ceci correspond clairement au fait qu'à un maximum ou un minimum (on omet généralement l'adjectif « local », mais il est implicite) la tangente à la courbe est horizontale. Sur la figure II.15 on peut voir qu'aux points x_2 et x_4 la tangente est aussi horizontale, comme aux points x_0 , x_1 et x_3 , cependant x_2 et x_4 ne sont ni des maximums ni des minimums locaux. Les points où la dérivée de la fonction est égale à zéro (les *points stationnaires*) forment une collection en règle générale plus grande que la collection des extremums locaux.

Recherche de la plus grande et la plus petite valeur prise par une fonction. Dans une grande variété de problèmes techniques il est parfois nécessaire de savoir pour quelle valeur de la variable indépendante x la fonction $f(x)$

atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur sur un segment donné de l'axe des x .

Quand nous parlons de rechercher le maximum de la fonction f , nous voulons surtout chercher dans le segment $[a, b]$ le point x_0 tel que pour tous les x dans ce segment l'inégalité suivante est satisfaite : $f(x_0) \geq f(x)$.

Cependant une question fondamentale se pose : un tel point existe-t-il toujours ? En utilisant les outils de l'analyse moderne, on peut démontrer le théorème d'existence suivant : si la fonction $f(x)$ est continue sur un segment borné et fermé (c'est-à-dire dont les deux bornes font partie de la section de nombres considérés¹⁰), alors il existe au moins un point où la fonction atteint son maximum (resp. son minimum) sur le segment $[a, b]$.

De ce qui vient d'être dit, on déduit que le maximum et le minimum doivent être cherchés avant tout parmi les points « stationnaires ». C'est la base de la méthode bien connue pour rechercher les points où la fonction atteint un extremum. On calcule d'abord la fonction dérivée f' de la fonction f , puis on résout l'équation

$$f'(x) = 0$$

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont les racines de cette équation, alors on compare entre eux les nombres $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Bien sûr il faut prendre en compte la possibilité que le maximum et le minimum ne soient pas strictement à l'intérieur de $[a, b]$ mais soient à l'une ou l'autre des bornes a et b (comme c'est par exemple le cas pour le minimum sur la figure II.15). Ou bien le maximum ou le minimum peuvent être à un point où

10. Il y a plusieurs façons de considérer un segment de nombres ayant pour bornes les nombres réels a et b . Le segment peut inclure ou pas ses bornes. Si les deux bornes font partie du segment, alors on note l'ensemble des nombres réels considérés $[a, b]$. Si a appartient au segment, mais pas b , on le note $[a, b)$ ou $[a, b[$. Si b appartient au segment, mais pas a , on le note $(a, b]$ ou $]a, b]$. Si ni a ni b ne font partie de l'ensemble des points considérés, on note le segment (a, b) ou $]a, b[$. Ces différents types de segments ont des propriétés différentes en analyse et en topologie. Nous verrons cela plus loin. Pour l'instant les auteurs parlent du segment $[a, b]$ qui est dit « fermé ».

la fonction n'a pas de dérivée (comme sur la figure II.12). C'est pourquoi dans l'examen de l'endroit où est atteint le maximum ou le minimum de f nous devons ajouter à la liste des racines de l'équation $f'(x) = 0$ les bornes a et b et les points s'il en existe où la fonction continue f n'a pas de dérivée. Ensuite, en comparant toutes les valeurs prises par f en ces différents points, on détermine où elle est maximale et où elle est minimale.

Concernant le théorème d'existence énoncé plus haut, il est important de signaler qu'en règle générale il cesse d'être vrai si on considère la fonction continue $f(x)$ seulement sur l'intervalle ouvert (a, b) , c'est-à-dire sur l'ensemble des points x satisfaisant les inégalités strictes $a < x < b$. Nous laissons au lecteur et à la lectrice le soin de démontrer que la fonction $\frac{1}{x}$ sur l'intervalle ouvert $(0, 1)$ n'a pas de maximum, ni de minimum d'ailleurs.

Regardons quelques exemples.

À partir d'une plaque de tôle de forme carrée de côté a , on doit fabriquer une boîte parallélépipédique ouverte sur le dessus ayant le plus grand volume possible. Si nous découpons quatre carrés de côté x dans chaque coin de la plaque (comme montré sur la figure II.2 dans le deuxième exemple de fonction présenté section II.2) et plions la forme, nous obtenons une boîte de volume

$$V = x(a - 2x)^2$$

Notre problème se ramène à la recherche de la valeur de x pour laquelle la fonction $V(x)$ atteint son maximum, quand la variable indépendante x reste naturellement dans le segment $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. En appliquant plusieurs fois la règle de différentiation d'un produit, nous trouvons la dérivée de V , et nous écrivons qu'elle doit être égale à zéro :

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = 0$$

En résolvant cette équation, nous trouvons les deux racines

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{6}$$

À la collection des racines, il convient d'ajouter la borne de gauche du segment sur lequel x peut prendre ses valeurs (celle de droite coïncide avec la racine x_1). Regardons les valeurs de la fonction $V(x)$ en ces trois points

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3, \quad V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

Nous voyons que la boîte atteindra son volume maximum, égal à $\frac{2}{27}a^3$ quand $x = \frac{a}{6}$.

Comme deuxième exemple, analysons le problème du lampadaire (voir section II.2, exemple 3). À quelle hauteur faut-il placer la lanterne pour que la patinoire reçoive le plus de lumière possible ?

En vertu de la formule (II.3), notre problème devient : chercher la valeur de h qui maximise $T = \frac{A \sin \alpha}{h^2 + r^2}$. À la place de h il est plus commode de chercher l'angle α (figure II.3 page 147). Les deux sont liés par la formule

$$h = r \tan \alpha$$

par conséquent

$$T = \frac{A}{r^2} \frac{\sin \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{A}{r^2} \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

Nous devons trouver l'angle α , dans le segment $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pour lequel la quantité $T(\alpha)$ est maximale. Dérivons la fonction de T par rapport à α , en utilisant les dérivées des fonctions trigonométriques et les règles de différentiation, et écrivons l'équation imposant que la dérivée soit égale à zéro

$$T'(\alpha) = \frac{A}{r^2} (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) = 0$$

La dérivée se factorise, et l'équation se scinde en deux parties

$$\cos \alpha = 0, \quad \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0$$

La première équation donne la racine $\alpha = \frac{\pi}{2}$, qui coïncide avec une borne du segment $(0, \frac{\pi}{2})$. La deuxième équation peut se réécrire

$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

Mais puisque $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, alors $\alpha \approx 35^\circ 15'$. C'est la valeur de l'angle pour laquelle la fonction $T(\alpha)$ atteint son maximum. Aux bornes de l'intervalle – qui, on se rappelle, doivent aussi être examinées en plus des racines – la fonction est moindre puisque en chacune d'elle T vaut zéro. La hauteur du lampadaire doit donc être égale à

$$h = r \tan \alpha = \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0,7 r$$

Pour un éclairage optimal de la patinoire circulaire, la lanterne doit placée à une hauteur approximativement égale à 70% de son rayon.

Supposons maintenant que les contraintes techniques ne permettent pas de placer la lanterne plus haut qu'une certaine hauteur H . Alors l'angle α ne peut plus varier entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; la plage de valeurs possibles est restreinte à $0 < \alpha \leq \arctan \frac{H}{r}$. Soit, par exemple, $r = 12 \text{ m}$ et $H = 9 \text{ m}$. Dans ce cas la lanterne peut encore être installée à la hauteur optimale $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$, car celle-ci est juste un peu au-dessus de 8 m , et reste donc techniquement possible. Mais si H est limitée à moins de 8 m (par exemple, si pour installer la lanterne nous n'avons à notre disposition qu'un poteau de 6 m), alors, sur le domaine de valeurs possibles de l'angle, $[0, \arctan \frac{H}{r}]$, la fonction $T(\alpha)$ n'a en aucun point une dérivée nulle. Dans ce cas la valeur maximale de l'éclairage est atteinte à la borne supérieure de l'intervalle, et la lanterne doit être placée à la plus grande hauteur techniquement possible, c'est-à-dire à $H = 6 \text{ m}$.

Jusqu'à présent nous avons considéré une fonction sur un intervalle fini. Si l'intervalle est infini, alors même une fonction continue peut ne pas avoir de maximum ou de minimum sur l'intervalle, mais croître ou décroître indéfiniment à mesure que x approche de l'infini.

Ainsi, par exemple, les fonctions $y = kx + b$ (voir fig. II.5 p. 151), $y = \arctan x$ (fig. II.16a ci-dessous) et $y = \ln x$ (fig. II.16b) n'atteignent pas de maximum ou de minimum où que ce soit. La fonction $y = e^{-x^2}$ (fig. II.16c) atteint la valeur maximale 1 au point $x = 0$, mais n'a nulle part de minimum.

Quant à la fonction $y = \frac{x}{1+x^2}$ (fig. II.16d), elle atteint un minimum au point $x = -1$ et un maximum au point $x = 1$.

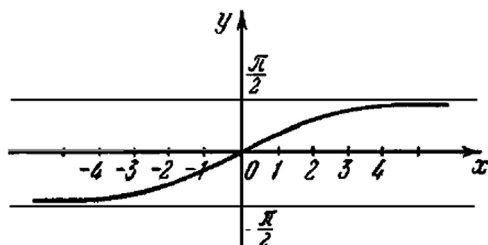


Figure II.16a : Fonction $y = \arctan x$.

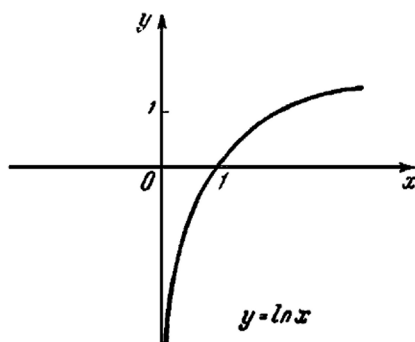


Figure II.16b : Fonction logarithme népérien.

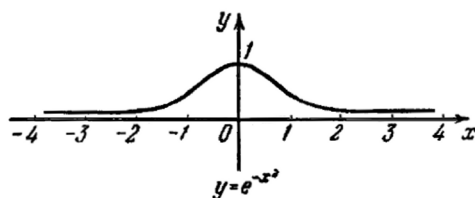


Figure II.16c Fonction e^{-x^2} (qui joue un grand rôle en probabilités sous la forme légèrement différente $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$).

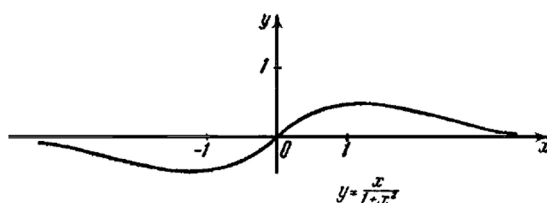


Figure II.16d : Fonction $\frac{x}{1+x^2}$.

Dans le cas d'un intervalle infini, on effectue la recherche des extremums selon les règles habituelles. Simplement, à la place de $f(a)$ et $f(b)$, il faut regarder les limites

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Dérivées d'ordre supérieur. Nous avons vu que déjà pour étudier en détail le graphe d'une fonction $f(x)$, nous devons aussi regarder comment se comporte, sur l'intervalle de définition, sa dérivée $f'(x)$. C'est elle-même une certaine fonction de x . On peut aussi regarder sa propre dérivée.

La dérivée de la dérivée s'appelle la *dérivée seconde* et est notée

$$[y']' = y'' \quad \text{ou} \quad [f'(x)]' = f''(x)$$

En poursuivant, on peut calculer la dérivée troisième

$$[y'']' = y''' \quad \text{ou} \quad [f''(x)]' = f'''(x)$$

et ainsi de suite. D'une façon générale la n -ième dérivée, ou comme l'on dit la dérivée d'ordre n , est notée

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

Nous devons, bien sûr, garder à l'esprit que pour certaines valeurs de x (ou même pour toutes les valeurs de x) ces dérivées successives peuvent cesser d'exister à partir d'un certain ordre : il peut arriver que $f^{(k)}(x)$ existe mais $f^{(k+1)}(x)$

n'existe pas. Nous utiliserons les dérivées d'un ordre quelconque, dans la section II.9, quand nous considérerons la formule de Taylor. Pour le moment nous allons concentrer notre attention sur la dérivée seconde.

Signification de la dérivée seconde. Convexité et concavité. La dérivée seconde a une signification simple en mécanique. Supposons que $s = f(t)$ soit la loi de mouvement d'un point suivant une trajectoire rectiligne¹¹ dans l'espace, alors $s'(t)$ est sa vitesse, et $s''(t)$ est le taux de variation de la vitesse c'est-à-dire l'accélération du point au temps t . Par exemple, dans le cas d'un corps en chute libre

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0 \quad (8)$$

$$s' = gt + v_0 \quad (9)$$

$$s'' = g$$

autrement dit, l'accélération d'un corps qui tombe est constante.

La constante g s'appelle l'*accélération due à la pesanteur terrestre* ; elle est égale à $9,81 \text{ m/s}^2$. Elle a un lien simple mais ne doit pas être confondue avec la constante gravitationnelle de Newton, G , qui apparaît dans la formule $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$, exprimant la force d'attraction entre deux masses.

La dérivée seconde a aussi une signification simple en géométrie. De même qu'avec le signe de la dérivée première on peut savoir si la fonction est croissante ou décroissante, le signe de la dérivée seconde nous indique dans quelle direction le graphe de la fonction est incurvé.

11. Le fait que la trajectoire du point soit *rectiligne* dans l'espace dans lequel elle est plongée n'est pas fondamental mais simplifie les concepts de vitesse et d'accélération : en effet on peut alors ne considérer que des grandeurs scalaires. Tandis que si la trajectoire est courbe, par exemple un cercle, la vitesse et l'accélération prennent tout leur sens seulement quand on considère les grandeurs vectorielles. L'accélération multipliée par la masse du point est égale à la force qui s'exerce sur lui. Celle-ci, par exemple sur un manège, contrebalance la force centrifuge, et plus généralement la force d'inertie.

Si dans une certaine portion du graphe la dérivée seconde est toujours positive, alors la dérivée première est croissante, $f'(x) = \tan \alpha$ croît. Et comme la fonction trigonométrique $\tan \alpha$ est croissante, on en déduit que l'angle α que fait la droite tangente avec l'axe des x est croissant lui aussi à mesure que x augmente (fig. II.17). La courbe est forcément incurvée vers le haut. On dit qu'elle est *convexe*.

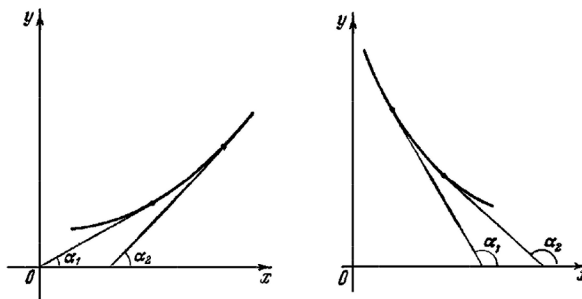


Figure II.17 : Courbes convexes.

À l'inverse, quand sur la portion considérée la dérivée seconde est toujours négative (fig. II.18), c'est-à-dire que la pente de la tangente décroît à mesure qu'on avance vers la droite, le graphe est incurvé vers le bas, et la courbe est dite *concave*.

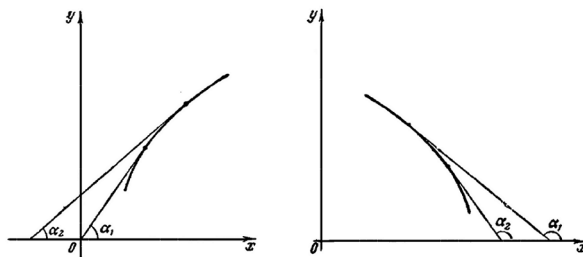


Figure II.18 : Courbes concaves.

Une autre définition de la convexité, purement géométrique, est la suivante : une courbe est dite convexe sur un certain segment de l'axe des x si quelle que soit la paire de points P et Q pris sur la courbe (avec leurs abscisses dans le segment), la corde, c'est-à-dire la ligne droite, reliant P à Q est entièrement *au-dessus* de la courbe (en russe la convexité s'appelle « un bombement vers le bas »). Et on a la définition analogue pour la concavité (qui s'appelle en russe « un bombement vers le haut »).

Signes d'un maximum ou d'un minimum. Étude du graphe d'une fonction. Si la courbe, sur tout un segment donné de l'axe des x , est concave et en un certain point x_0 sa dérivée est nulle, alors en ce point la fonction a nécessairement un maximum ; dans le cas où elle est convexe, elle a un minimum. Cette simple considération permet souvent, au point où la dérivée s'annule, de déterminer s'il y a un maximum local ou un minimum local en ce point. Dans les cas plus compliqués où la dérivée seconde elle-même change de signe, le problème de la clarification de la nature du point stationnaire est résolu à l'aide de la formule de Taylor (section II.9).

Exemple 1. Examinons à quoi ressemble le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 2$$

Prenons la dérivée première et imposons-lui d'être égale à zéro

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

Les racines de l'équation obtenue sont $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Les valeurs correspondantes de la fonction sont

$$f(2) = 2\frac{2}{3}, \quad f(3) = 2\frac{1}{2}$$

Reportons les deux points obtenus, où nous savons que la tangente à la courbe sera horizontale, sur un dessin en coordonnées cartésiennes (fig II.19). On peut tout de suite

leur adjoindre le point de coordonnées $x = 0$ et $y = f(0) = -2$, où le graphe coupe l'axe des y .

Regardons à présent la dérivée seconde : $f''(x) = 2x - 5$. Elle s'annule en $x = \frac{5}{2}$, de plus

$$f''(x) > 0 \quad \text{pour } x > \frac{5}{2}$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{pour } x < \frac{5}{2}$$

Le point

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\frac{7}{12}$$

est le *point d'inflexion* de la courbe. À sa gauche la courbe est concave, à sa droite elle est convexe.

Il est évident maintenant qu'en $x = 2$ la fonction a un maximum local, et en $x = 3$ un minimum local.

Sur la base de ces résultats, nous concluons que le graphe de la fonction $y = f(x)$ a la forme suivante :

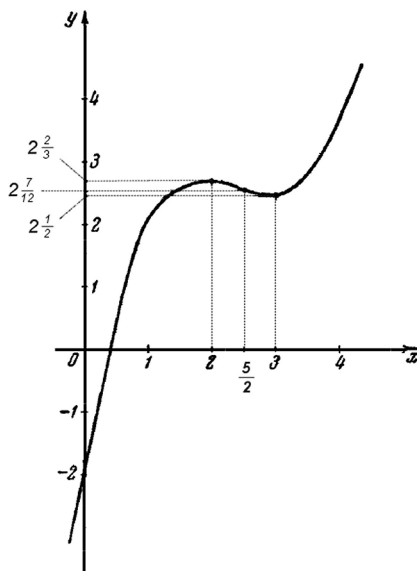


Figure II.19 : Graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 2$.

Depuis le point $(0, -2)$, en progressant vers la droite sur l'axe des x , la courbe s'accroît jusqu'au point $(2, 2\frac{2}{3})$ où elle atteint un maximum local, après quoi elle décroît en restant concave jusqu'au point d'inflexion $(2\frac{1}{2}, 2\frac{7}{12})$ où $f''(x) = 0$. En ce point la concavité se transforme en convexité, cependant la courbe continue à décroître. Elle décroît en étant maintenant convexe jusqu'au point $(3, 2\frac{1}{2})$ où elle atteint un minimum local. Enfin, restant maintenant définitivement convexe, la courbe s'accroît jusqu'à l'infini. On le sait car le premier terme dans l'expression de la fonction, celui contenant x à la puissance la plus élevée, c'est-à-dire ici x à la puissance 3, terme appelé aussi « d'ordre trois », tend plus vite vers l'infini que les termes d'ordre deux et d'ordre un (la constante, elle, reste constante). En suivant le même raisonnement, du côté gauche, la courbe plonge vers $-\infty$ quand x prenant des valeurs négatives augmente indéfiniment en valeur absolue.

Exemple 2. Nous voulons montrer que, quel que soit x , l'inégalité $e^x \geq 1 + x$ est satisfaite. Pour ce faire, regardons la fonction $f(x) = e^x - x - 1$. Sa dérivée première est $f'(x) = e^x - 1$, qui ne s'annule qu'en $x = 0$. La dérivée seconde, $f''(x) = e^x$, est strictement positive pour tout x . Par conséquent le graphe de f est entièrement convexe. Et au point $x = 0$, $y = f(0) = 0$, il y a un minimum non seulement local mais global, donc quel que soit x , on a $e^x - x - 1 \geq 0$.

L'examen des graphes peut avoir une grande variété d'objectifs. À l'aide des graphes, par exemple, on peut souvent obtenir des informations sur les racines réelles d'une équation. Ainsi, afin de démontrer que l'équation

$$xe^x = 2$$

a une seule racine réelle, on peut étudier les graphes de $y = e^x$ et $y = \frac{2}{x}$ (ces fonctions sont représentées sur la figure II.20). Il est facile de voir que les graphes de ces deux fonctions se coupent en un seul point, et par conséquent que l'équation $e^x = \frac{2}{x}$ n'a qu'une racine réelle.

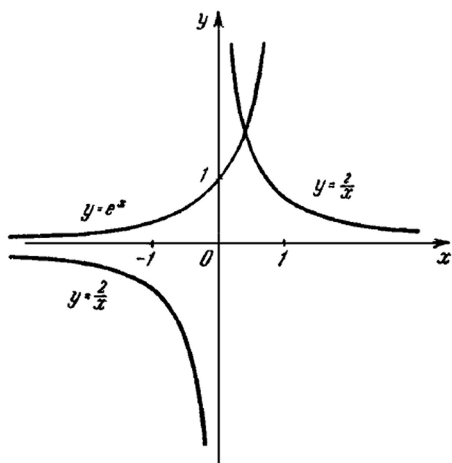


Figure II.20 : Examen des graphes de $y = e^x$ et $y = \frac{2}{x}$ pour savoir combien de racines réelles a l'équation $xe^x = 2$.

Les méthodes de l'analyse sont très utiles dans le problème du calcul de la valeur approximative des racines des équations. Pour en savoir plus voir le chapitre IV, section IV.5, du présent volume.

II.8 Accroissement et différentielle d'une fonction

Différentielle d'une fonction. Considérons une fonction $f(x)$ et supposons-la dérivable. L'accroissement de cette fonction

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

correspondant à l'accroissement Δx de l'*argument* (un autre nom de la variable indépendante) a la propriété que le ratio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite finie quand $\Delta x \rightarrow 0$. Cette limite est égale à la dérivée au point x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$$

On peut réécrire ceci comme l'égalité suivante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

où α est une grandeur dépendante de Δx (et aussi en règle générale de x que l'on suppose donné dans toute cette section) telle que, quand $\Delta x \rightarrow 0$, elle tend aussi vers zéro. Il en découle que l'accroissement de la fonction peut s'écrire

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

où $\alpha \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$.

Le premier terme du membre de droite de cette égalité dépend très simplement de Δx : il est proportionnel à Δx . On l'appelle la *différentielle* de la fonction pour la valeur donnée x , correspondant à un accroissement Δx donné de l'argument. Et on note cette différentielle

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Le second terme du membre de droite de l'égalité en haut de la page a la caractéristique qu'il tend vers zéro, quand $\Delta x \rightarrow 0$, *plus vite que* Δx , grâce à la présence du terme α qui multiplie l'accroissement. On dit que ce second terme est un infinitésimal d'ordre supérieur à l'infinitésimal Δx , ou, de manière équivalente, est un infiniment petit par rapport à Δx ¹². Cela a un sens technique précis : cela veut dire qu'en prenant Δx suffisamment petit, le second terme $\alpha\Delta x$ peut être rendu aussi petit qu'on veut non seulement dans l'absolu, mais aussi par rapport à Δx . Et naturellement dans le cas où $f'(x) \neq 0$, $\alpha\Delta x$ est aussi un infiniment petit par rapport à $f'(x)\Delta x$.

12. Il existe une variété d'expressions et de notations pour signifier qu'une quantité a est, ou plus précisément devient, infiniment petite par rapport à une quantité b quand cette dernière tend vers zéro. Le mathématicien allemand Edmund Landau (1877-1938) a proposé l'expression « petit o de b » et la notation $o(b)$. On dit que « a est un petit o de b » si $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{a}{b} = 0$. Une autre expression est simplement « a est négligeable par rapport à b quand b tend vers zéro ».

Cette décomposition de Δy en deux termes, dont le premier dépend linéairement de Δx , et le second est un infiniment petit par rapport à Δx est montrée graphiquement sur la figure II.21.

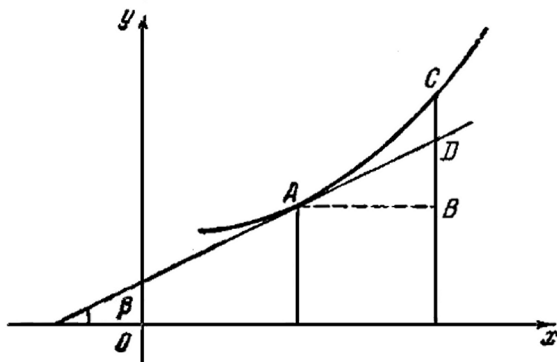


Figure II.21 : Examen des accroissements Δy et Δx et de la différentielle dy au voisinage de x c'est-à-dire de l'abscisse du point de tangence A de la droite AD

Le segment horizontal AB est l'accroissement Δx , et le segment vertical BC est l'accroissement Δy . Cet accroissement Δy est la somme de deux segments :

$$BC = BD + DC$$

où $BD = \tan \beta \cdot \Delta x = f'(x) \Delta x = dy$, et DC est un infinésimal d'ordre supérieur à Δx , c'est-à-dire qu'il tend vers zéro quand $\Delta x \rightarrow 0$, mais il tend *plus vite que* Δx . Comme on peut le voir sur la figure, $\frac{DC}{AB} \rightarrow 0$ quand AB tend vers zéro.

En pratique on utilise souvent la différentielle comme valeur approximative de l'accroissement de la fonction. Par exemple supposons que nous voulions déterminer le volume des parois d'une boîte cubique fermée, dont les dimensions internes sont $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}$, et l'épaisseur des parois est $0,05 \text{ cm}$. Si on n'a pas besoin d'une grande précision on peut raisonner comme ceci : le volume de l'ensemble des parois de la

boîte est exactement égal à l'accroissement Δy de la fonction $y = x^3$ pour $x = 10$ et $\Delta x = 0,1$. On peut écrire l'égalité approximative

$$\Delta y \approx dy = (x^3)' \Delta x = 3x^2 \Delta x = 3 \cdot 10^2 \cdot 0,1 = 30 \text{ cm}^3$$

Pour des raisons de symétrie dans les notations et désignations, il est habituel d'utiliser pour l'accroissement de la variable indépendante Δx la notation dx et de l'appeler aussi une différentielle. Avec cette convention, la différentielle de la fonction s'écrit

$$dy = f'(x)dx$$

D'où il découle que l'on peut écrire pour la dérivée : $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Autrement dit, la dérivée est effectivement le ratio entre la différentielle de la fonction et la différentielle de la variable indépendante.

La différentielle d'une fonction a pour origine historique le concept d'« indivisible ». D'un point de vue moderne c'est un concept qui était loin d'être clair à l'époque de son introduction au XVII^e siècle. Il a joué cependant un rôle central dans la création et le développement de l'analyse. La définition de ce concept a subi d'importantes modifications au cours de plus de deux siècles. L'indivisible, et un peu plus tard la différentielle d'une fonction, étaient d'abord présentés comme effectivement des « quantités infiniment petites » – comme des grandeurs à la fois constantes et « très très petites », mais néanmoins non nulles...

La définition d'une différentielle donnée plus haut est celle de l'analyse moderne¹³. Dans cette définition, la différentielle de la fonction $y = f(x)$ est une quantité finie, elle-même *fonction* de l'accroissement de la variable indépendante x , c'est-à-dire prenant une valeur distincte pour chaque Δx , et en fait

13. Il existe une théorie alternative des différentielles et des dérivées, appelée *analyse non standard*, créée dans les années 1960 par Abraham Robinson (1918-1974), qui définit d'une autre manière rigoureuse une notion d'infiniment petit, et qui arrive aussi à une justification impeccable de $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Les auteurs n'utilisent pas l'analyse non standard dans cet ouvrage.

tout simplement proportionnelle à cette valeur (mais avec un facteur de proportionnalité différent pour chaque x). Dans notre vision moderne, l'autre grande propriété de cette différentielle dy – la nature de sa différence avec l'accroissement Δy – ne peut être connue que dans un environnement mobile, pour ainsi dire. Si nous regardons l'accroissement Δx tendre vers zéro (ce qui est la définition d'un infinitésimal en mathématiques contemporaines, cf. page 160), alors la différence entre dy et Δy va devenir arbitrairement petite même par rapport à l'accroissement Δx lui-même.

La plupart des applications de l'analyse infinitésimale dans l'étude de phénomènes physiques reposent sur le remplacement des petits accroissements des fonctions considérées par leurs différentielles. La lectrice et le lecteur verront cela clairement et abondamment illustré dans les exemples d'équations différentielles, qui sont le sujet des chapitres V et VI de l'ouvrage (dans le deuxième volume).

Afin de trouver puis d'étudier une fonction représentant un processus donné, on s'efforce d'abord d'obtenir un équation liant cette fonction d'une manière ou d'une autre à ses dérivées de différents ordres. La méthode pour parvenir à une telle équation – appelée une *équation différentielle* – consiste souvent à remplacer les accroissements des fonctions que l'on recherche par les différentielles correspondantes.

À titre d'exemple, résolvons le problème suivant. Dans l'espace muni d'un système de coordonnées cartésiennes $Oxyz$ considérons la surface obtenue en faisant tourner autour de son axe une parabole, dont l'équation (dans le plan vertical Oyz) est $z = y^2$. Cette surface porte le nom de parabolôïde de révolution (fig. II.22). Soit v le volume délimité par le parabolôïde et le plan horizontal, parallèle à Oxy à la hauteur z . Il est clair que v est fonction de z ($z > 0$).

Pour trouver à quoi est égale la fonction $v(z)$, essayons de trouver sa différentielle dv . L'accroissement Δv de la fonction v au point z est égal au volume de la tranche de parabolôïde entre les hauteurs z et $z + \Delta z$

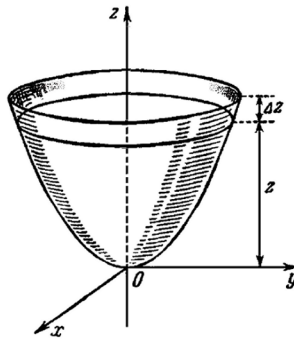


Figure II.22 : Calcul du volume d'un parabolôide à l'aide d'une équation différentielle.

Il est facile de voir que cette quantité Δv est plus grande que le volume du cylindre très aplati de rayon \sqrt{z} et de hauteur Δz , mais aussi qu'elle est plus petite que le cylindre de rayon $\sqrt{z + \Delta z}$ et de même hauteur. Autrement dit on a

$$\pi z \Delta z < \Delta v < \pi (z + \Delta z) \Delta z$$

et, par conséquent,

$$\Delta v = \pi (z + \theta \Delta z) \Delta z = \pi z \Delta z + \pi \theta \Delta z^2$$

où θ est un nombre que l'on ne connaît pas, dépendant de Δz et satisfaisant les inégalités $0 < \theta < 1$.

Ainsi, nous sommes capables de représenter l'accroissement Δv sous la forme d'une somme dont le premier terme est proportionnel à Δz , et le second terme est un infinitésimal d'ordre supérieur à Δz (quand $\Delta z \rightarrow 0$). Il s'ensuit que le premier terme est forcément la différentielle de la fonction v

$$dv = \pi z \Delta z$$

ou

$$dv = \pi z dz$$

puisque pour la variable indépendante on a $dz = \Delta z$.

L'équation que l'on a obtenue lie entre elles les différentielles dv et dz (des variables respectives v et z) et pour cette raison est appelée une équation différentielle.

Si l'on prête attention au fait que

$$\frac{dv}{dz} = v'$$

où v' est la dérivée de v par rapport à la variable z , alors notre équation différentielle peut encore s'écrire

$$v' = \pi z$$

La résolution de cette équation différentielle, parmi les plus simples qui soient, se ramène à la recherche d'une fonction de z , dont la dérivée soit égale à πz . Le problème général, qui est la recherche d'une *primitive*, est traité dans les sections II.10 et II.11. Pour l'instant nous invitons le lecteur et la lectrice à vérifier que toutes les fonctions de la forme $v = \frac{\pi z^2}{2} + C$, où l'on peut prendre pour la quantité C n'importe quel nombre constant, résolvent l'équation différentielle. (On verra plus loin qu'il n'y en a pas d'autres.) Donc la fonction que l'on recherche, exprimant le volume du parabolôïde en fonction de z , fait partie de ces solutions. Nous avons aussi une autre contrainte évidente, dans notre cas, qui nous permet de savoir laquelle est la bonne : manifestement $v(0)$ doit être égal à zéro ; par conséquent $C = 0$. Nous avons ainsi démontré que la fonction que nous recherchions est $v = \frac{\pi z^2}{2}$.

Théorème de la moyenne¹⁴ **et exemples d'applications.** La différentielle donne une valeur approximative de l'accroissement de la fonction, exprimée à l'aide de l'accroissement de la variable indépendante et de la valeur de la dérivée au point de départ de l'accroissement. Si nous parlons de la variation de la fonction sur une portion entre $x = a$ et $x = b$, alors

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a)$$

14. Appelé aussi théorème de Rolle, en référence au mathématicien français Michel Rolle (1652-1719).

Il se trouve qu'on peut avoir une égalité exacte si on remplace, à droite, la dérivée $f'(a)$ au point de départ du segment par la dérivée en un point sélectionné de manière appropriée quelque part dans le segment (a, b) . Plus précisément :

Si $y = f(x)$ est une fonction différentiable sur le segment $a \leq x \leq b$ alors il existe un point ξ strictement compris entre a et b pour lequel l'égalité exacte suivante est satisfaite

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (\text{II.22})$$

La signification géométrique du théorème de la moyenne, connu aussi en Russie sous le nom de formule de Lagrange, ou formule des accroissements finis, est extrêmement simple. Supposons que sur le graphe de la fonction $f(x)$ les points A et B , correspondant aux valeurs a et b , soient reliés par la corde AB (figure II.23). Nous translatons lentement la droite AB vers le haut et vers le bas en prenant soin qu'elle reste parallèle à sa position d'origine. À un moment donné notre ligne droite va toucher la courbe de la fonction f une dernière fois avant de s'en éloigner ; à ce moment-là elle sera tangente à la courbe au point C .

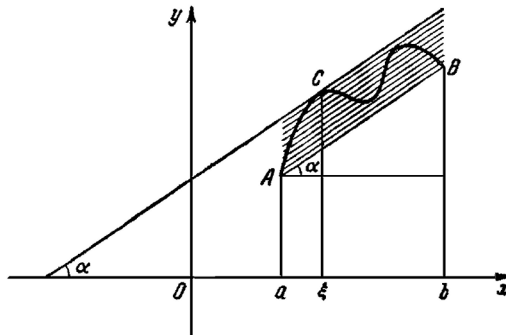


Figure II.23 : Justification intuitive du théorème de la moyenne.

En ce point C (désignons son abscisse par ξ), la tangente fait le même angle α avec l'axe des x que la corde AB . L'angle de

la corde AB satisfait la relation

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D'autre part, au point C on a

$$\tan \alpha = f'(\xi)$$

Par conséquent on a l'égalité

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

qui est précisément le théorème de la moyenne.

Il va sans dire que ces considérations géométriques offrent une justification intuitive de théorème de la moyenne, mais ne constituent pas une démonstration rigoureuse.

La formule (II.22) a ceci de particulier qu'elle fait référence à un point ξ dont ne nous ne connaissons pas la valeur. La seule chose que nous sachions est qu'il est « quelque part sur le segment (a, b) »¹⁵. Malgré l'incertitude sur la localisation du point où la tangente a la même pente que la corde, c'est-à-dire la pente moyenne, cette formule a une grande importance théorique, car elle sert à démontrer un grand nombre de théorèmes en analyse. Elle a aussi une valeur pratique immédiate, puisqu'elle permet d'estimer l'accroissement de la fonction quand on connaît les limites entre lesquelles peut varier sa dérivée. Par exemple,

$$|\sin b - \sin a| = |\cos \xi| (b - a) \leq b - a$$

Ici a , b et ξ sont des angles exprimés en radians ; ξ est une certaine valeur entre a et b ; elle est inconnue, mais on sait que $|\cos \xi| \leq 1$.

Au vu de la formule (II.22), il est clair qu'une fonction dont la dérivée est partout égale à zéro, est nécessairement

15. C'est un exemple de *théorème d'existence* que les mathématiciens « constructivistes » (voir section I.9) réprouvent car pour eux les seules mathématiques qui valent sont celles qui travaillent exclusivement sur des quantités déterminables et calculables.

constante ; elle ne peut sur une aucune partie de son domaine de définition avoir un accroissement non nul. Le lecteur et la lectrice peuvent prouver de manière analogue qu'une fonction dont la dérivée est toujours positive est nécessairement croissante ; et elle est nécessairement décroissante si sa dérivée est toujours négative. Signalons aussi sans le démontrer une généralisation du théorème de la moyenne :

Étant donné deux fonctions quelconques $\phi(x)$ et $\psi(x)$ différentiables sur le segment $[a, b]$, [à la seule condition que $\psi'(x)$ soit différent de 0 sur (a, b)] l'égalité suivante est satisfaite

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\text{II.23})$$

pour une certaine valeur de ξ dans le segment (a, b) .

Noter que cette formule se démontre, par exemple, par une simple application du théorème de la moyenne à la fonction

$$f(x) = \phi(x) - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}\psi(x)$$

Ce résultat est très utile car il offre une méthode générale pour calculer les limites de la forme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \quad (\text{II.24})$$

quand $\phi(0) = \psi(0) = 0$ (et donc le ratio devient a priori incertain car les deux fonctions, supposée dérivables et donc continues, tendent vers zéro). En utilisant la formule (II.23), observons que

$$\frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{\psi(x) - \psi(0)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

où ξ se trouve quelque part entre 0 et x , et par conséquent $\xi \rightarrow 0$ avec x . Cela permet quand on recherche une limite de ratio de la forme (II.24) de la remplacer par la recherche de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$$

ce qui dans la plupart des cas simplifie considérablement le problème¹⁶.

La même règle est vraie quand on cherche la limite d'une expression sous forme de ratio dans lequel à la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini. Cette technique, qui est très utile pour calculer de telles limites (ou, comme on dit, pour « lever l'incertitude ») sera utilisée par exemple dans la section XII.3 du chapitre XII (volume 2).

Exemple. Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$. En appliquant trois fois la règle nous trouvons successivement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

II.9 Formule de Taylor¹⁷

La fonction

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

où les coefficients a_k sont des constantes, s'appelle un *polynôme de degré n* . En particulier, la fonction $y = ax + b$ est un polynôme de degré 1 ou du premier degré, et la fonction $y = ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré 2 ou du second degré. On appelle aussi un polynôme de degré 2 un trinôme. On peut considérer les polynômes comme les fonctions les plus simples. Pour calculer la valeur que prend le polynôme en une valeur donnée de x , l'addition, la soustraction et la multiplication suffisent ; la division n'est même pas nécessaire. Les

16. Ce résultat est connu en France sous le nom de Règle de l'Hôpital, du nom du marquis de l'Hôpital (1661-1704) qui l'a publiée dans son ouvrage *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* en 1696. Elle est sans doute due à Jean Bernoulli (1667-1748), l'un des membres de la célèbre famille suisse des Bernoulli.

17. Du nom du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731) qui l'établit en 1715. Elle porte aussi parfois le nom de Formule de Taylor-MacLaurin, quand on lui associe le nom du mathématicien écossais Colin MacLaurin (1698-1746).

polynômes sont non seulement continus en toutes les valeurs de x , mais ont des dérivées de n'importe quel ordre. D'ailleurs la dérivée d'un polynôme est encore un polynôme du degré juste en dessous, et la dérivée d'ordre $n + 1$ d'un polynôme de degré n est zéro et les suivantes aussi.

Si aux polynômes nous ajoutons les fonctions de la forme

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{a_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

appelée fractions rationnelles, pour le calcul desquelles on a besoin de la division, et encore les fonctions \sqrt{x} et $\sqrt[3]{x}$ et enfin les combinaisons arithmétiques de ces fonctions, nous obtenons alors toutes les fonctions que l'on peut calculer à l'aide des méthodes apprises au collège et au lycée.

Déjà au lycée on a eu une première exposition aux fonctions plus avancées comme

$$\sqrt[5]{x}, \log x, \sin x, \arctan x, \dots$$

Nous avons appris les propriétés les plus importantes de ces fonctions, mais les mathématiques élémentaires (c'est-à-dire celles de la deuxième période, entre Euclide et Descartes, dans le découpage historique présenté au chapitre I) ne répondent pas à la question : comment les calculer ? Quelles opérations, par exemple, doit-on effectuer sur x afin d'obtenir $\log x$ ou $\sin x$. La réponse à cette question est apportée par les méthodes nouvelles développées dès les débuts de l'analyse. Nous allons à présent étudier en détail l'une de ces méthodes.

Formule de Taylor. Considérons, définie sur un certain segment contenant le point a , une fonction donnée $f(x)$ ayant des dérivées de tous les ordres. Le polynôme du premier degré

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

coïncide au point a avec $f(x)$ et possède en ce point-là, comme il n'est pas difficile de voir, une dérivée qui est aussi la même que celle de $f(x)$. Le graphe du polynôme est la ligne droite tangente à la courbe de $f(x)$ au point a . Il est possible de

choisir un polynôme du second degré allant un pas plus loin : en effet le trinôme

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

au point $x = a$ a la même valeur que $f(x)$, la dérivée $p_2'(x)$ a la même valeur que $f'(x)$ et la dérivée seconde $p_2''(x)$ a la même valeur que $f''(x)$. Son graphe va passer par le point $(a, f(a))$, partager en ce point la même tangente avec f , mais il va rester encore plus près de la courbe de f , quand x est dans le voisinage de a , que ne le fait la tangente commune. Il est naturel, si nous construisons un polynôme qui au point $x = a$ a la même valeur que f et les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre n , de s'attendre à ce que ce polynôme, quand x est proche de a , approxime encore mieux la fonction $f(x)$. C'est ainsi qu'est construite la formule de Taylor qui approxime la fonction f au voisinage de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (\text{II.25})$$

Le membre de droite de cette formule est un polynôme de degré n en $(x - a)$. Pour chaque valeur de x on peut le calculer si l'on connaît $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$.

Pour les fonctions ayant une $(n+1)$ -ième dérivée, le membre de droite de la formule (II.25) diffère du membre de gauche, comme il est facile de le démontrer, par un infinitésimal d'ordre supérieur à $(x - a)^n$, c'est-à-dire qui tend vers zéro plus vite que $(x - a)^n$. En outre, c'est le seul polynôme de degré n possible qui ait cette propriété, quand x s'approche de a , de différer de $f(x)$ par une quantité tendant vers zéro plus vite que $(x - a)^n$. Dans le cas où la fonction $f(x)$ est elle-même un polynôme de degré n , la formule (II.25) exprimant une approximation devient une égalité exacte.

Finalement, et c'est extrêmement important, il est possible d'exprimer simplement la différence entre le membre de droite de la formule (II.25) et $f(x)$. En effet, afin que l'approximation devienne une égalité, il est nécessaire d'ajouter

à droite un « terme résiduel » à l'expression précédente

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \quad (\text{II.26})$$

Ce terme rajouté

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

a la particularité que la dérivée doit être calculée chaque fois non au point a lui-même mais en un point spécialement sélectionné ξ que nous ne connaissons pas à l'avance, mais dont nous savons qu'il se trouve quelque part dans l'intervalle entre a et x . (L'expression ci-dessus pour $R_{n+1}(x)$ n'est que l'une de ses formes possibles.)

La démonstration habituelle de l'égalité (II.26) est plutôt lourde en termes des diverses quantités à manipuler, mais dans son principe elle est très simple. Nous donnons ci-après une variante quelque peu synthétique mais courte de cette démonstration.

Pour établir de combien $f(x)$ diffère de son approximation dans la formule (II.25), considérons le ratio ayant au numérateur la différence entre le membre de gauche et le membre de droite et au dénominateur $-(x-a)^{n+1}$

$$\frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right]}{-(x-a)^{n+1}} \quad (\text{II.27})$$

Et introduisons la fonction

$$\phi(u) = f(u) + f'(u)(x-u) + \dots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n$$

de la variable u , en regardant momentanément x comme une quantité fixe (une constante). Alors le numérateur de (II.27) n'est rien d'autre que l'accroissement de cette fonction ϕ quand

u passe de $u = a$ à $u = x$, et le dénominateur est l'accroissement correspondant de la fonction

$$\psi(u) = (x - u)^{n+1}$$

Il reste à utiliser la généralisation du théorème de la moyenne que l'on a vue plus haut

$$\frac{\phi(x) - \phi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

Effectuant la différentiation par rapport à u des deux fonctions $\phi(u)$ et $\psi(u)$ (pour cela il faut se rappeler que x est traité comme une constante : on l'a fixée), on démontre que

$$\frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

En identifiant cette dernière expression avec l'expression initiale (II.27), et en multipliant de part et d'autre par $-(x - a)^{n+1}$, on tombe précisément sur la formule de Taylor sous sa forme d'égalité exacte (II.26) comportant un terme résiduel.

Sous cette forme (II.26), la formule de Taylor offre non seulement un moyen pour calculer approximativement $f(x)$, mais aussi permet d'estimer l'erreur faite dans ce cas. Regardons un exemple simple

$$y = \sin x$$

Nous connaissons les valeurs en $x = 0$ de la fonction $\sin x$ et de ses dérivées de n'importe quel ordre. Nous allons utiliser cela et écrire la formule de Taylor pour $\sin x$, en prenant $a = 0$ et en nous limitant à cinq termes principaux dans le développement (i.e. $n = 4$) plus le terme résiduel. Nous trouvons successivement

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x \\ f'''(x) = -\cos x, & f^{IV}(x) = \sin x, & f^V(x) = \cos x \\ f(0) = 0, & f'(0) = 1, & f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -1, & f^{IV}(0) = 0, & f^V(\xi) = \cos \xi \end{array}$$

Par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_5, \quad \text{où } R_5 = \frac{x^5}{120} \cos \xi$$

Bien que nous ne connaissions pas la valeur exacte de R_5 il est facile d'en avoir une borne supérieure étant donné que $|\cos \xi| \leq 1$. Si nous nous limitons aux valeurs de x entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, alors on a

$$|R_5| = \left| \frac{x^5}{120} \cos \xi \right| \leq \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{4} \right)^5 < \frac{1}{400}$$

Ainsi, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$, la fonction $\sin x$, avec une erreur inférieure à 0,25%, peut être considérée comme égale à un polynôme du troisième degré :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$$

Si dans l'expansion de $\sin x$ par la formule de Taylor nous prenons davantage de termes, nous obtenons un polynôme de degré plus élevé, offrant une approximation de $\sin x$ encore meilleure.

Les tables trigonométriques et beaucoup d'autres tables sont calculées à l'aide de méthodes comparables¹⁸.

Les lois de la nature sont en règle générale exprimées avec une bonne approximation par des fonctions différentiables autant de fois qu'on veut (on les appelle des fonctions « infiniment différentiables »), qui à leur tour sont approximées par des polynômes; le choix du degré du polynôme est dicté par la précision que l'on veut avoir.

Séries de Taylor. Si on prend un nombre de plus en plus grand de termes dans la formule (II.25), à un certain moment l'erreur commise, c'est-à-dire le reste résiduel $R_{n+1}(x)$, peut

18. Les calettes qui donnent les fonctions trigonométriques, logarithmes et autres avec une douzaine de décimales fonctionnent sur le même principe, en ramenant les calculs à des suites d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions élémentaires.

tout simplement s'annuler. Bien sûr, c'est loin d'être toujours le cas : pour la plupart des fonctions et la plupart des valeurs de x , ce n'est pas le cas. Cependant, il existe une vaste classe de fonctions (les fonctions dites *analytiques*) pour lesquelles, quand $n \rightarrow \infty$, le terme résiduel $R_{n+1}(x)$ tend effectivement vers zéro au moins quand la variable x se trouve dans un certain voisinage entourant le point a . C'est précisément pour de telles fonctions que la formule de Taylor permet de calculer $f(x)$ avec la précision qu'on veut. Examinons ces fonctions plus en détail.

Si $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, il découle de (II.26) que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right]$$

Dans ce cas on dit que la fonction $f(x)$ peut être développée en une série infinie convergente, et on l'écrit ainsi, avec trois petits points

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

Elle est formée de puissances croissantes de $(x-a)$ (la puissance d'ordre n ayant comme facteur multiplicateur devant elle la dérivée d'ordre n de f au point a , divisée par factorielle n). Une telle série s'appelle une *série de Taylor*. Et $f(x)$ est la somme de sa série de Taylor (au point a , calculée pour la variable x). Nous allons voir quelques exemples d'expansion en série de Taylor avec des fonctions que nous connaissons bien (on a pris $a = 0$ dans ces exemples) :

$$1) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

(vrai pour tout $|x| < 1$ et n'importe quel *nombre réel* n)

$$2) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (\text{vrai pour tout } x)$$

$$3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{vrai pour tout } x)$$

$$4) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{vrai pour tout } x)$$

$$5) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{vrai pour } |x| \leq 1)$$

Le premier de ces exemples est le célèbre binôme de Newton, qu'il énonça et utilisa pour tous les nombres réels n , mais à son époque une démonstration complète n'existait que pour les nombres n entiers. Cet exemple sert de modèle pour créer la formule générale d'une série de Taylor. Les deux derniers exemples nous permettent en prenant $x = 1$ de calculer les nombres e et π avec la précision qu'on veut ¹⁹.

L'importance pratique de la formule de Taylor, qui ouvre la voie à la plupart des calculs dans les applications de l'analyse, ne peut pas être surestimée.

Les fonctions qui sont développables en série de Taylor expriment avec une grande précision de nombreuses lois de la nature : les processus physiques et chimiques, les lois de mouvement des corps, etc. Leur théorie prend toute sa signification et toute sa puissance quand on les considère non plus dans le cadre des nombres réels mais dans celui des nombres complexes, où les variables indépendantes et dépendantes appartiennent au corps des complexes. La théorie des fonctions complexes recevra toute la place et le traitement qu'elle mérite dans le chapitre IX (volume 2).

L'idée même d'approximer une fonction par un polynôme et plus généralement de représenter une fonction comme la somme d'une série infinie de termes simples a eu des conséquences profondes dans le développement de l'analyse. C'est l'objet du chapitre XII (vol 2) sur la théorie de l'approximation des fonctions.

19. La dernière série pour $x = 1$ donne $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. C'est la formule de Madhava-Leibniz, des noms du mathématicien indien du XIV^e siècle Madhava (c.1340-c.1425) qui l'a formulée le premier et de Leibniz que l'a retrouvée vers 1676. Contrairement à l'exemple 4 qui converge très vite et permet d'obtenir en quelques calculs une très bonne approximation de e , l'exemple 5 converge très lentement et n'a pas d'utilité pratique pour calculer une valeur approximative de π .

II.10 Intégrale

Dans le chapitre I et dans la première section du chapitre présent nous avons déjà exposé à la lectrice et au lecteur les idées de base de l'intégration – que l'on peut décrire de manière très générale comme l'« opération inverse de la dérivation ». Nous avons expliqué que le calcul intégral a pour origine historique le besoin de résoudre certains problèmes spécifiques, le plus typique d'entre eux étant le calcul de la surface sous une courbe. Nous allons maintenant rentrer dans les détails. Nous allons aussi étudier de manière approfondie les liens entre la différentiation et l'intégration, liens qui furent complètement élucidés seulement au XVIII^e siècle.

Surfaces. Soit une ligne courbe, tracée au-dessus l'axe des x , représentant le graphe d'une fonction $y = f(x)$ (fig II.24). Nous voulons trouver la quantité S qui est la mesure de la surface délimitée par la courbe, l'axe des x , et les deux droites verticales en a et en b parallèles à l'axe des y .

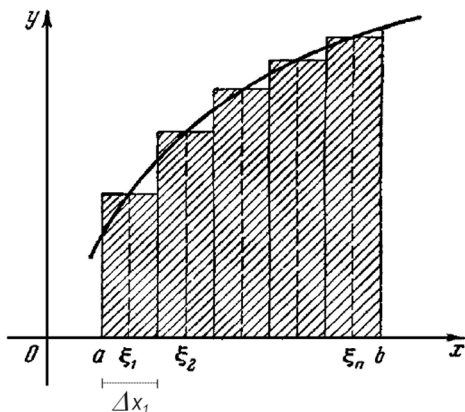


Figure II.24 : Calcul de la surface sous une courbe à l'aide d'un découpage vertical, puis d'un passage à la limite.

Pour résoudre ce problème, nous procédons de la manière suivante. Nous divisons le segment $[a, b]$ en n parties (pas

nécessairement de même largeur). Nous dénotons la largeur de la première partie par Δx_1 , de la deuxième par Δx_2 , et ainsi de suite jusqu'à Δx_n . Dans chaque partie i nous choisissons un point ξ_i , obtenant ainsi la collection de points $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ avec lesquels nous construisons la somme suivante

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n \quad (\text{II.28})$$

La grandeur S_n est égale à la somme des surfaces des rectangles verticaux hachurés ci-après.

En rendant de plus en plus mince chaque bande verticale i , de largeur Δx_i , construite sur le segment $[a, b]$, et en augmentant leur nombre, la somme S_n va s'approcher de la surface S . Autrement dit, si on construit une suite de découpages du segment $[a, b]$, le divisant en une partition de plus en plus fine, les sommes S_n vont tendre vers S .

La possibilité de diviser $[a, b]$ en parties Δx_i de la largeur inégale demande que l'on clarifie ce que l'on veut dire par partition « de plus en plus fine ». Nous voulons dire que non seulement nous faisons croître n indéfiniment, mais que le maximum des Δx_i dans la n -ième partition tend vers zéro. Ainsi

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n] \quad (10) \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\text{II.29}) \end{aligned}$$

Nous avons ramené le problème du calcul de la surface à celui de cette limite (II.29).

Noter, quand nous nous sommes fixé l'objectif de calculer la surface S , que nous avons une *idée intuitive* de ce qu'est la surface d'une figure curviligne, mais nous n'en avons pas de définition exacte. La définition élémentaire d'une surface s'applique, en effet, seulement aux rectangles. Notre méthode nous conduit en réalité à la *définition* du concept de surface sous une courbe quelconque : c'est tout simplement, par définition, la limite (II.29).

Maintenant nous avons non seulement une idée intuitive de ce qu'est la surface sous une courbe, mais nous en avons aussi une *définition mathématique* qui va nous permettre de la calculer (se rappeler la remarque faite page 168 sur la *longueur* de la circonférence d'un cercle, ou, encore avant, sur la *vitesse instantanée* d'un point en mouvement : dans chaque cas ces concepts doivent être *définis* précisément au-delà de l'intuition qu'on en a).

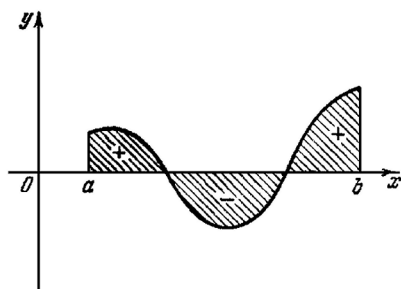


Figure II.25 : Les surfaces sous l'axe des x , au lieu d'être ajoutées, doivent être retranchées.

Nous avons supposé que $f \geq 0$. Si f change de signe, comme sur la figure II.25, alors la limite (II.29) donne la somme algébrique des différentes surfaces, celles se trouvant au-dessus de l'axe des x sont comptées avec un signe plus, et celles se trouvant en dessous avec un signe moins.

Intégrale définie. De nombreux problèmes conduisent au besoin de calculer une limite du même type que (II.29). Supposons par exemple qu'un point se déplace sur une trajectoire rectiligne et qu'à chaque instant t sa vitesse (instantanée) soit donnée par la fonction $v = f(t)$. Comment calculer le chemin s parcouru par le point dans l'intervalle de temps entre $t = a$ et $t = b$?

Nous allons supposer que la fonction $f(t)$ est continue, c'est-à-dire que dans un court intervalle de temps la vitesse change peu. (C'est naturellement la formulation informelle de

la continuité de la fonction $f : \forall t_0, \lim_{(t-t_0) \rightarrow 0} [f(t) - f(t_0)] = 0$.) Nous divisons le segment $[a, b]$ en n petites périodes $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$. Pour calculer de manière approximative le chemin parcouru dans chaque petite période Δt_i , considérons que durant cette période la vitesse était constante, égale à la vitesse instantanée à un moment quelconque ξ_i de cette période. La totalité du chemin parcouru est alors approximativement égale à la somme

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i$$

Nous trouverons la valeur exacte du chemin s parcouru entre les temps a et b en calculant la limite de s_n quand la partition devient de plus en plus fine. C'est donc une limite de la même forme que l'expression (II.29) :

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i$$

On peut citer de nombreux autres problèmes dans la pratique dont la solution se ramène au calcul d'une limite comparable. Nous en rencontrerons, mais pour l'instant les exemples déjà donnés éclairent suffisamment l'importance de cette limite. La limite (II.29) s'appelle l'*intégrale définie* de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$, et elle est notée

$$\int_a^b f(x) dx$$

Le signe \int (qui représente un S étiré) s'appelle le signe intégrale, ou le signe somme. L'expression $f(x)dx$ est dite « sous le signe somme ». Cette expression, hormis dx , s'appelle l'intégrande. Les nombres a et b sont les bornes d'intégration ; a est la borne inférieure, b la borne supérieure. Toute l'expression se lit en français : « intégrale de a à b de f de x dx » ou « somme de a à b de f de x dx ».

Lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral.

L'exemple 2 dans la section II.1, pp. 137-138, peut servir de premier exemple de calcul direct d'une intégrale définie. Maintenant on peut voir notre problème sous un jour nouveau. Il s'agissait de calculer

$$\int_0^h ax \, dx$$

On a regardé un autre exemple dans la section II.3, pp. 157-158, quand on a résolu le problème de trouver la surface sous la parabole $y = x^2$ entre les bornes 0 et 1. Là la question consistait en le calcul de l'intégrale

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

Nous avons été capables de calculer ces deux intégrales parce que nous connaissions une formule simple pour la somme des n premiers entiers naturels, et pour la somme de leurs carrés. Cependant c'est loin d'être le cas pour n'importe quelle fonction $f(x)$, qu'on puisse aisément trouver une formule pour la somme (II.28) où les points ξ_i et les intervalles Δx_i sont donnés par une loi ou une autre. En outre, dans les cas où il est possible de trouver une expression pour la somme discrète de n éléments, c'est toujours à l'aide d'une méthode *ad hoc*, pas à l'aide d'une procédure générale qui serait applicable à presque tous les problèmes.

Ainsi se pose le problème de trouver une méthode universelle pour calculer les intégrales définies. Historiquement, c'est un problème auquel les mathématiciens ont été confrontés pendant des siècles sous sa forme particulière consistant à trouver une méthode générale pour déterminer l'aire de figures planes ayant des frontières curvilignes, le volume de formes en trois dimensions dont l'enveloppe n'est pas faite d'éléments plans et simples, et du reste aussi la surface de cette enveloppe, etc.

Nous avons déjà signalé qu'Archimède fut capable de calculer la surface (l'aire) sous une parabole et la surface de

quelques autres figures. Par la suite, le nombre de problèmes spécifiques, similaires au calcul d'une surface, d'un volume, du centre de gravité d'un corps, etc., que nous avons su résoudre s'est progressivement accru. Cependant, le processus de création d'une *méthode générale* pour résoudre ces problèmes a démarré très lentement. Elle ne pouvait émerger qu'après qu'un nombre suffisant de résultats théoriques et pratiques eurent été accumulés ; et ceux-ci de leur côté apparurent toujours en lien avec les besoins pratiques. L'accumulation de nouveaux résultats et leur généralisation s'accéléchèrent considérablement et commencèrent à se développer vigoureusement à la fin du Moyen Âge. Ce fut la conséquence directe du développement rapide des forces productives en Europe lors de la Renaissance²⁰, laquelle fut marquée parmi d'autres choses par l'effondrement de l'ancien système féodal et l'apparition de nouvelles structures sociales et économiques liées à l'essor du capitalisme.

Aux XVI^e et XVII^e siècles, les résultats sur le calcul d'intégrales définies s'accumulèrent en même temps que ceux sur les dérivées des fonctions. Dans la section II.1 on a vu que cet énorme travail préparatoire était déjà bien avancé quand apparurent dans la deuxième moitié du XVII^e siècle les travaux de Newton et de Leibniz. C'est parce qu'ils réalisèrent la synthèse de ces résultats qu'ils sont considérés comme les créateurs du calcul différentiel et intégral, mais surtout parce qu'ils allèrent plus loin et firent une contribution fondamentale.

20. Pour comprendre la Renaissance européenne il convient de distinguer deux périodes dans le temps et dans l'espace : d'une part, le Quattrocento italien (XV^e siècle, qui démarra en réalité dès le milieu du XIV^e siècle, et qui est le résultat de la prise d'indépendance dès la fin du XII^e siècle des villes d'Italie du Nord par rapport au Saint Empire), période surtout d'évolutions politiques et artistiques, tournée vers l'Antiquité, peu intéressée par les sciences ou les techniques ; et, d'autre part, la Renaissance au nord des Alpes qui démarra environ un siècle plus tard (dans la seconde moitié du XV^e siècle et s'épanouit au XVI^e siècle) tout de suite marquée par les grandes inventions (imprimerie, montre, etc.), les grandes découvertes géographiques et scientifiques. La période de bouleversement dont parlent les auteurs est la seconde.

Le mérite capital de Newton et Leibniz est d'avoir exposé clairement dans leurs travaux – réalisés indépendamment l'un de l'autre – la connexion profonde qui existe entre le calcul différentiel et le calcul intégral. Cette connexion conduit, en particulier, à une méthode générale pour calculer les intégrales définies d'une large classe de fonctions.

Pour expliquer ce lien, prenons un exemple issu de la mécanique.

Supposons qu'un point matériel se déplace sur une trajectoire rectiligne à une vitesse $v = f(t)$ fonction du temps t . Nous savons déjà que le chemin σ parcouru par notre point le long de sa trajectoire entre les temps $t = t_1$ et $t = t_2$ est égal à l'intégrale définie suivante :

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Supposons, d'autre part, que nous connaissions la loi de mouvement du point, c'est-à-dire la fonction $s = F(t)$ exprimant la dépendance entre le temps t et le chemin parcouru s , mesuré à partir d'un point origine O choisi sur la droite. La distance σ parcourue au cours de l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est manifestement égale au résultat de la soustraction

$$\sigma = F(t_2) - F(t_1)$$

Ainsi à partir de considérations physiques, issues de la mécanique, nous sommes parvenus à l'égalité

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1)$$

qui exprime un lien entre la loi de mouvement de notre point, $s = F(t)$ et sa vitesse instantanée, $v = f(t)$.

D'un point de vue mathématique, la fonction $F(t)$, comme nous l'avons vu dans la section II.5, est caractérisée par le fait que sa dérivée, à chaque temps t est égale à $f(t)$, autrement dit

$$F'(t) = f(t)$$

Une telle fonction s'appelle une *primitive* de la fonction $f(t)$.

Il faut garder à l'esprit que si la fonction $f(t)$ a une primitive, alors elle en a une infinité. En effet si $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, alors $F(t) + C$, où C est une constante arbitraire, est aussi une primitive de $f(t)$. Cela constitue, toutefois, l'ensemble des primitives de $f(t)$, parce que si $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont toutes deux des primitives de $f(t)$, alors leur différence $\phi(t) = F_1(t) - F_2(t)$, a partout sur l'intervalle de temps considéré une dérivée nulle : $\phi'(t) = 0$ quel que soit t . Par conséquent $\phi(t)$ est une constante. Rappelons pourquoi. Par le théorème de la moyenne, on a

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \phi'(\nu)(t - t_0)$$

où ν est un temps situé quelque part entre t et t_0 . Donc $\phi'(\nu) = 0$, et donc $\phi(t) = \phi(t_0)$ pour n'importe quel t .

D'un point de vue physique, les différentes valeurs de C déterminent des lois de mouvement qui ne diffèrent que par le point O à partir duquel on mesure le chemin s parcouru. Mais elles décrivent toutes le même mouvement.

Ce qu'on vient de voir nous conduit à la conclusion que, dans des conditions très générales sur la fonction $f(x)$ définie pour tout x dans le segment $[a, b]$, dans tous les cas où cette fonction peut être vue comme la vitesse au temps x d'un point en mouvement, l'équation suivante est vérifiée

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{II.30})$$

où $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$. Il est possible de prouver mathématiquement, sans avoir recours à des exemples tirés de la mécanique, que si la fonction $f(x)$ est continue (et même discontinue, mais intégrable au sens de Lebesgue, voir chapitre XV volume 3) sur le segment $[a, b]$, alors elle a une primitive $F(x)$ qui satisfait l'équation (II.30).

Cette équation est la célèbre *formule de Newton et Leibniz*, ramenant le problème de calculer l'intégrale définie d'une

fonction à celui de trouver sa primitive²¹, et de cette manière établissant un lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral.

De nombreux problèmes, qui occupèrent des mathématiciens de premier plan au cours des siècles, sont résolus immédiatement à l'aide de cette formule, qui exprime que l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ est égale à la différence entre les valeurs prises par une quelconque de ses primitives au point b et au point a , c'est-à-dire aux bornes du segment d'intégration. Une notation courante pour la différence apparaissant du côté droit de l'équation (II.30) est

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

On verra que la formule (II.30) se généralise de différentes manières (dans la section II.13 voir par exemple la formule d'Ostrogradski). Mais passons tout d'abord à des exemples d'application de la formule de Newton et Leibniz.

Exemple 1. L'identité

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

montre que la fonction $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction x^2 . Par conséquent, par la formule de Newton et Leibniz,

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Exemple 2. Soit sur une droite donnée c et c' deux charges électriques à distance r l'une de l'autre. La force d'interaction F entre elles, qui est le long de la droite, a la valeur

$$F = \frac{a}{r^2}$$

21. L'usage est de parler de *la* primitive de f , alors qu'il faudrait dire *une* primitive de f , mais ses diverses primitives ne diffèrent que par une constante. Prononciation : pour $F(x)$ on dit « grand f de x » et pour $f(x)$ on dit « petit f de x » quand il faut marquer la différence.

($a = kcc'$, où k est une constante). Le travail W effectué par cette force, quand la charge c est fixée, et la charge c' se déplace sur le segment $[R_1, R_2]$, peut être calculé en partitionnant ce segment $[R_1, R_2]$ en n parties Δr_i . Sur chacune d'elles on peut considérer la force comme approximativement constante, par conséquent le travail effectué sur la partie i est égal à $\frac{a}{r_i^2} \Delta r_i$. En rendant la partition de plus en plus fine, nous voyons que le travail W est égal à l'intégrale

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a}{r_i^2} \Delta r_i = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2} dr$$

Nous pouvons tout de suite calculer cette intégrale quand on remarque que

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)'$$

Il s'ensuit que

$$W = -\frac{a}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

En particulier, le travail effectué par la force F tandis que la charge c' , qui était au départ à la distance R_1 de la charge c , se déplace jusqu'à l'infini est

$$W = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{a}{R_1}$$

Déjà à partir des considérations qui nous ont menés jusqu'à la formule de Newton et Leibniz, il est clair que cette formule mathématique exprime une certaine connexion profonde qui existe dans la réalité. La formule de Newton et Leibniz est un exemple excellent et en outre très important de la façon dont les mathématiques reflètent elles-mêmes les lois objectives de la nature.

Il faut dire que Newton dans ses recherches mathématiques s'est toujours placé du point de vue de la physique. Ses travaux sur les fondations du calcul différentiel et intégral ne peuvent pas être dissociés de ceux qu'il mena sur les fondations de la mécanique.

Les outils de l'analyse mathématique, comme la dérivée, l'intégrale, dans la conception que s'en faisaient Newton et ses contemporains n'avaient pas encore acquis une existence propre, indépendante de leurs prototypes physiques et géométriques (la vitesse, l'aire). Ils étaient encore, dans leur essence, à moitié mathématiques et à moitié physiques. En effet, à l'époque de leur émergence, les définitions qu'on en donnait, d'un strict point de vue mathématique, étaient encore insatisfaisantes. Par conséquent, leur utilisation correcte dès que les problèmes devenaient compliqués exigeait du chercheur qu'il soit capable de rester toujours proche des aspects concrets du problème qui l'occupait, même dans les étapes intermédiaires a priori purement logiques.

À cet égard les travaux menés indépendamment l'un de l'autre par Newton et par Leibniz avaient des caractères distincts. Newton, à toutes les étapes de ses travaux, était constamment guidé par le point de vue physique. Les recherches de Leibniz n'ont pas ce lien direct avec la physique. En l'absence de définitions mathématiques claires, le fait de ne pas être ainsi guidé par la nature le conduisit parfois à des conclusions erronées dans certaines étapes de ses travaux. D'un autre côté les travaux de Leibniz sont caractérisés par le souci de parvenir à des méthodes communes, à l'applicabilité la plus générale possible, pour résoudre les problèmes de l'analyse mathématique.

La contribution la plus importante de Leibniz est la création du symbolisme mathématique qui reflète et suggère bien intuitivement l'essence des concepts. La notation par exemple du concept basique de l'analyse qu'est la différentielle avec le signe dx , de la différentielle d'ordre deux avec d^2x , de l'intégrale avec $\int y dx$, de la dérivée avec $\frac{d}{dx}$ sont des apports de Leibniz. Le fait que toutes ces notations soient encore utilisées de nos jours montre à quel point elles sont adaptées.

Un symbolisme judicieusement choisi facilite et accélère considérablement nos calculs et nos raisonnements. De surcroît cela nous protège parfois de conclusions erronées. Leibniz qui était bien conscient de cela apporta le plus grand soin

dans ses travaux au choix des notations.

Les concepts de l'analyse mathématique (dérivées, intégrales, etc.) ont bien sûr continué à évoluer après Newton et Leibniz et continuent de nos jours. Cependant, il est important d'observer qu'un nouveau pas important a été franchi au début du XIX^e siècle, principalement avec les travaux de Cauchy.

Cauchy donna une définition formelle et claire du concept de limite, et sur cette base il définit les concepts de continuité, de dérivée, de différentielle et d'intégrale. Ces définitions sont données chacune à l'endroit approprié du présent chapitre. Nous en faisons un grand usage en analyse moderne.

L'importance de ces accomplissements réside dans le fait qu'il devenait possible d'opérer purement formellement non seulement en arithmétique, algèbre, et géométrie élémentaire, comme on le faisait depuis longtemps, mais maintenant aussi dans le nouveau et vaste champ mathématique de l'analyse, et de confirmer que les résultats obtenus précédemment étaient bien corrects

En ce qui concerne les applications, en tout cas, on peut maintenant dire en pratique pour la grande majorité des résultats en analyse mathématique que si les données initiales sont correctes, alors les résultats produits par les raisonnements mathématiques sont corrects aussi; si nous sommes convaincus que la précision des données de départ est suffisante, alors la validité des résultats obtenus ne demande pas de vérification particulière – il faut juste s'assurer que les raisonnements logiques ne comportent pas d'erreur.

Ce qui vient d'être dit appelle néanmoins une réserve. Dans les raisonnements mathématiques, les données initiales qui proviennent des observations sont correctes seulement avec un certain niveau de précision. Cela a pour conséquence qu'à chaque étape de nos raisonnements et calculs sur les données nous produisons un peu plus d'erreur, au sens de déviation, par rapport à la nature. En effet les déviations s'accumulent, ou se composent, à mesure que le nombre d'étapes augmente. Par exemple, logiquement de $a = b$ et $b = c$ on déduit que

$a = c$. Mais en pratique la déduction est plutôt celle-ci : du fait que $a = b$ avec une précision ϵ et $b = c$ aussi avec une précision ϵ , on peut seulement dire que $a = c$ avec une précision 2ϵ .

Retournant aux intégrales définies, arrêtons-nous sur une question d'une importance capitale. Pour quelles fonctions $f(x)$, définies sur le segment $[a, b]$, peut-on garantir l'existence de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, c'est-à-dire que la somme $\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$ tende vers une limite quand $\max \Delta x_i \rightarrow 0$? Il est entendu, en outre, que cette limite doit être la même quels que soient la suite de partitions de plus en plus fines du segment $[a, b]$ utilisées et le choix des points intermédiaires ξ_i .

Les fonctions pour lesquelles l'intégrale définie, c'est-à-dire la limite (II.29), existe s'appellent les *fonctions intégrables* sur le segment $[a, b]$. Dès le XIX^e siècle les mathématiciens démontrèrent que toutes les fonctions continues sont intégrables.

Il existe aussi des fonctions discontinues qui sont intégrables. Par exemple, les fonctions $y = f(x)$ croissantes ou décroissantes, où $|y|$ est borné, sont intégrables sur $[a, b]$.

La fonction égale à zéro en tous les points rationnels de $[a, b]$ et égale à un en tous les points irrationnels, peut être vue comme l'exemple typique d'une fonction qui n'est pas intégrable, puisque dans n'importe quelle partition, aussi fine soit-elle, on peut prendre des points ξ_i tels que S_n vaille toujours zéro, ou vaille toujours $b - a$.

Noter que la question du calcul effectif de l'intégrale définie est résolue la plupart du temps par la formule de Newton-Leibniz. Cela devient, cependant, alors le problème de trouver une primitive d'une fonction donnée f , c'est-à-dire trouver une fonction F dont la dérivée est f . Nous allons y venir. Notons d'ailleurs que trouver la primitive est aussi très important dans d'autres problèmes que le calcul de l'intégrale. C'est aussi le cas par exemple dans la résolution des équations différentielles.

II.11 Intégrales indéfinies. Techniques d'intégration

En mathématiques, n'importe quelle primitive d'une fonction donnée $f(x)$ s'appelle l'*intégrale indéfinie* de $f(x)$ ²². On note l'intégrale indéfinie

$$\int f(x) dx$$

Par conséquent si $F(x)$ est une certaine primitive bien définie de $f(x)$, on peut écrire

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (\text{II.31})$$

où C est une constante arbitraire.

Notons aussi que si la fonction $f(x)$ est donnée sur le segment $[a, b]$, si $F(x)$ est sa primitive, et si x est un point du segment, alors de la formule de Newton-Leibniz il découle que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

Ainsi l'intégrale, du côté droit de cette égalité, diffère de la primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$ seulement par la constante $F(a)$. Dans ce cas, cette intégrale, si on la regarde comme une fonction de sa borne d'intégration supérieure x (la variable x), est une primitive particulière bien définie de $f(x)$. Par conséquent on peut écrire l'intégrale indéfinie encore sous la forme

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C$$

où C est une constante arbitraire.

Tableau des intégrales indéfinies. Dans le tableau (II.32) sont présentées les principales intégrales indéfinies, obtenues directement à partir du tableau correspondant des principales dérivées (section II.6, page 193) :

22. Autrement dit, pour parler de manière plus exacte, l'intégrale indéfinie de f est la *classe* de toutes ses primitives.

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

(II.32)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad = -\arccos x + C_1 \quad (C_1 - C = \frac{\pi}{2})$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Examinons plus en détail la primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ (deuxième ligne, équation de gauche), qui est égale à $\ln|x|$. En effet :

$$\text{pour } x > 0, \quad (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (11)$$

$$\text{pour } x < 0, \quad (\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Les propriétés générales des intégrales indéfinies découlent aussi de celles correspondantes des dérivées. Par exemple de la règle de différentiation d'une somme on déduit la formule

$$\int [f(x) + \phi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \phi(x) dx + C$$

De même, de la règle qui permet qu'un facteur multiplicatif constant k soit sorti de la dérivée, on tire

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx + C$$

Ainsi,

$$\int (3x^2 + 2x - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} - 1) dx = 3 \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 4 \ln|x| - x + C$$

Il existe une collection de méthodes pour calculer les intégrales indéfinies. Soulignons l'une d'elles : la *méthode du changement de variable*, appelée aussi méthode de la substitution, qui est fondée sur la validité de l'égalité :

$$\int f(x) dx = \int f[\phi(t)] \phi'(t) dt + C \quad (\text{II.33})$$

où $x = \phi(t)$ est une fonction différentiable de t .

La relation (II.33) doit être comprise de la manière suivante : si dans la fonction

$$F(x) = \int f(x) dx$$

qui est le membre de gauche de l'égalité (II.33), nous posons $x = \phi(t)$, alors nous obtenons la fonction de t suivante : $F[\phi(t)]$. Sa dérivée par rapport à t est la fonction que nous avons écrite sous le signe somme dans le membre de droite de (II.33). Cela découle directement du théorème sur la dérivée d'une fonction de fonction. On peut aussi trouver une fonction $\psi(x) = t$, qui simplifie de manière équivalente les calculs. Voici quelques exemples d'utilisation de la méthode du changement de variable

$$\int e^{kx} dx = \int e^t \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int e^t dt = \frac{1}{k} e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

(on a utilisé ci-dessus la substitution $kx = t$, d'où $kdx = dt$).

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(substitution $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, d'où $dt = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$).

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} a \cos u du \quad (12)$$

$$= a^2 \int \cos^2 u du = a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du \quad (13)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + C \quad (14)$$

$$= \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C \quad (15)$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C$$

(substitution $x = a \sin u$).

Comme le montrent ces exemples, la technique du changement de variable permet d'étendre significativement la classe des fonctions élémentaires que nous pouvons maintenant intégrer, c'est-à-dire pour lesquelles on peut aisément trouver la primitive et celle-ci est encore une fonction élémentaire. Cependant, il faut garder à l'esprit que l'intégration, quand elle est possible, nécessite en règle générale plus de calculs que la différentiation.

On a vu dans la section II.6 que la dérivée de n'importe quelle fonction élémentaire était encore une fonction élémentaire, et qu'on pouvait effectivement complètement la calculer en utilisant les règles de différentiation. Mais ce n'est pas vrai en général pour l'inverse, c'est-à-dire pour l'intégration. Il existe en effet des fonctions élémentaires dont les intégrales indéfinies ne sont pas des fonctions élémentaires. C'est le cas par exemple de fonctions comme e^{-x^2} , $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, etc. Pour obtenir leurs intégrales, il faut utiliser des méthodes d'approximation ou introduire de nouvelles fonctions qui ne sont pas réductibles à des fonctions élémentaires. Nous n'allons pas nous attarder sur cette question, notant seulement que déjà en mathématiques élémentaires il est possible de trouver beaucoup d'exemples où une opération directe est faisable au sein d'une certaine classe de nombres tandis que l'opération inverse, en restant dans la même classe, n'est pas possible ;

ainsi le carré de n'importe quel nombre rationnel est encore un nombre rationnel, tandis que la racine carrée d'un nombre rationnel l'est rarement. De manière analogue, la différentiation des fonctions élémentaires donne des fonctions élémentaires, mais l'intégration peut nous faire sortir de cette classe de fonctions.

Certaines intégrales qui ne peuvent pas être calculées à l'aide de fonctions élémentaires jouent un très grand rôle en mathématiques théoriques et appliquées. C'est le cas par exemple de

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

qui joue un rôle très important en théorie des probabilités²³ (chapitre XI tome 2). Notons dans le même cas les intégrales

$$\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{et} \quad \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \quad (k^2 < 1)$$

qui portent le nom d'*intégrales elliptiques*, respectivement de première et deuxième espèces. La nécessité de les calculer apparaît dans un très grand nombre de problèmes en mécanique et en physique (voir chapitre V, vol. 2, section V.1, exemple 3). Des tables très détaillées des valeurs de ces intégrales pour diverses valeurs des arguments x et ϕ ont été compilées, calculées par des méthodes d'approximation avec une grande précision.

Il faut souligner que démontrer que telle ou telle fonction élémentaire particulière ne peut pas être intégrée à l'aide de fonctions élémentaires est dans chaque cas un problème très difficile. Ces questions, dont l'étude joua un rôle important dans le développement de l'analyse, occupèrent l'esprit de mathématiciens et analystes de premier plan au XIX^e siècle. Des résultats fondamentaux sont au crédit de Tchebychev, qui, en

23. L'intégrande, recalibré pour que son intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ vaille 1, est le prototype de la « courbe en cloche » ou « courbe de Gauss » qui pour des raisons théoriques que nous verrons se rencontre partout en théorie des probabilités (voir son graphe page 203).

particulier, explora complètement la question de savoir quand il était possible d'intégrer à l'aide de fonctions élémentaires des expressions la forme

$$\int x^m (a + bx^s)^p dx$$

où m , s et p sont des nombres rationnels. Avant Tchebychev, on connaissait trois relations, obtenues par Newton, entre les exposants m , s et p , qui permettaient l'intégrabilité à l'aide de fonctions élémentaires. P.L. Tchebychev montra que dans tous les autres cas cette intégrale ne peut pas être exprimée ainsi.

Présentons une autre technique d'intégration qu'il est très utile de connaître : *l'intégration par partie*. Elle repose sur la formule que connaissent maintenant le lecteur et la lectrice

$$(uv)' = uv' + u'v$$

pour la dérivée du produit de deux fonctions. On peut aussi l'écrire

$$uv' = (uv)' - u'v$$

Intégrons à présent de part et d'autre, gardant à l'esprit que

$$\int (uv)' dx = uv + C$$

On arrive à

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

qui s'appelle la *formule d'intégration par partie*. (Nous n'avons pas ajouté la constante C , puisqu'elle est implicitement contenue dans l'une ou l'autre des intégrales indéfinies.)

Regardons quelques exemples d'application de cette formule. On veut calculer $\int xe^x dx$. On peut voir l'intégrande comme uv' où $u = x$ et $v' = e^x$. Alors de la connaissance que $u' = 1$ et $v = e^x$ on tire

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Dans l'intégrale $\int \ln x \, dx$, si l'on prend $u = \ln x$ et $v' = 1$, alors $u' = \frac{1}{x}$ et $v = x$, d'où

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Voici un autre exemple typique où il faut intégrer par partie deux fois, puis on trouve l'intégrale à partir de l'équation obtenue :

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx & (16) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

d'où

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

Avec ceci nous achevons cette section qui a offert au lecteur et à la lectrice une présentation seulement superficielle de la théorie de l'intégration. Nous ne nous sommes pas attardés sur de nombreuses méthodes de cette théorie. En particulier, nous n'avons pas abordé ici la très intéressante théorie de l'intégration des fractions rationnelles – une théorie à laquelle a fait des contributions importantes le grand mathématicien et mécanicien ukrainien M. V. Ostrogradski (1801-1862).

II.12 Fonctions à plusieurs variables

Jusqu'à présent nous avons parlé des fonctions à une variable, mais en pratique nous avons souvent affaire à des fonctions qui dépendent de deux, trois ou généralement plusieurs variables. Par exemple, la surface d'un rectangle

$$S = xy$$

est fonction de sa base x et de sa hauteur y . Le volume d'un parallélépipède rectangle

$$v = xyz$$

est fonction de ses trois dimensions. La distance entre une paire de points A et B est la fonction

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

qui dépend des six coordonnées de ces points. La formule thermodynamique bien connue

$$pv = RT$$

exprime la dépendance entre le volume v d'une quantité donnée de gaz, sa pression p et sa température absolue T .

Les fonctions à plusieurs variables, comme les fonctions à une variable, sont généralement données seulement sur un certain domaine de définition dans lequel les variables indépendantes peuvent prendre leurs valeurs. Par exemple, la fonction

$$u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \quad (\text{II.34})$$

est définie seulement pour les valeurs de x , y , z , satisfaisant la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1 \quad (\text{II.35})$$

(Pour les autres valeurs de x , y , z , les valeurs qu'elle prend ne sont pas des nombres réels.) L'ensemble des points dont les coordonnées satisfont l'inégalité (II.35) est clairement la boule de rayon un centrée à l'origine. Cependant les points à la frontière ne sont pas inclus, autrement dit la boule a été en quelque sorte « pelée » comme une pomme de terre et la sphère qui forme sa frontière retirée. On dit qu'il s'agit de la boule ouverte. La fonction (II.34) est définie seulement pour les triplets de nombres (x, y, z) qui représentent les coordonnées des points dans cette boule G . En bref, la fonction (II.34) est définie sur la boule ouverte G .

Voici un autre exemple. La température d'un corps V chauffé de manière non uniforme est une certaine fonction des coordonnées des points dans ce corps. Cette fonction n'est pas définie pour tous les triplets x, y, z , mais seulement pour ceux correspondant à des points du corps V .

Enfin, comme troisième exemple, regardons la fonction

$$u = \phi(x) + \phi(y) + \phi(z)$$

où ϕ est une fonction d'une variable, définie sur le segment $[0, 1]$. On voit que la fonction u est définie seulement pour les triplets de nombres (x, y, z) , représentant les coordonnées des points dans le cube fermé :

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

Donnons la définition générale d'une fonction à trois variables. Soit un ensemble E de triplets de nombres (x, y, z) (ou de manière équivalente un ensemble de points dans l'espace à trois dimensions). Si à chaque triplet (point) de E , en vertu d'une certaine loi, correspond un certain nombre u , alors on dit que u est une fonction de x, y, z (ou du point qu'ils représentent), définie sur l'ensemble E , et on la note

$$u = F(x, y, z)$$

À la place de F , on peut avoir d'autres lettres : f, ϕ, ψ, \dots

En pratique, E est souvent l'ensemble des points qui remplissent une certaine figure géométrique (une région) : une boule, un cube, un anneau, etc. Alors on dit simplement que la fonction est définie sur cet ensemble (région). De manière analogue, on définit les fonctions de deux variables, de quatre variables, etc.

Définition d'une fonction implicite. Noter qu'une fonction à deux variables peut très bien, dans certaines circonstances, servir à définir une fonction d'une variable. On prend une fonction de deux variables $F(x, y)$, et on pose l'équation

$$F(x, y) = 0 \tag{II.36}$$

D'une manière générale, cela définit un certain lieu dans le plan muni d'un repère cartésien : l'ensemble des points (x, y)

dont les coordonnées satisfont cette contrainte (II.36)²⁴. Souvent ces ensembles dessinent des courbes, qui peuvent être vues comme les graphes d'une ou plusieurs fonctions d'une variable $y = \phi(x)$ ou $x = \psi(y)$. Dans ce cas on dit que ces fonctions d'une variable sont définies de manière implicite par l'équation (II.36). Par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

définit de manière implicite deux fonctions d'une variable

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Cependant, il faut garder à l'esprit qu'une équation de la forme (II.36) peut ne correspondre à aucune fonction. Par exemple, l'équation

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

manifestement ne produit aucune fonction de variables réelles, puisqu'aucune paire de nombres réels ne satisfait cette contrainte.

Représentations géométriques. Les fonctions à deux variables se prêtent très bien à une représentation sous forme de surfaces en utilisant un système de coordonnées spatiales à trois dimensions. Ainsi la fonction

$$z = f(x, y) \tag{II.37}$$

dessine dans l'espace à trois dimensions muni d'un système de coordonnées cartésiennes une surface. C'est le lieu des points M dans l'espace dont les coordonnées x, y, z satisfont l'équation (II.37) (figure II.26).

24. C'est une terminologie habituelle d'appeler parfois une équation, de manière équivalente, une « contrainte ».

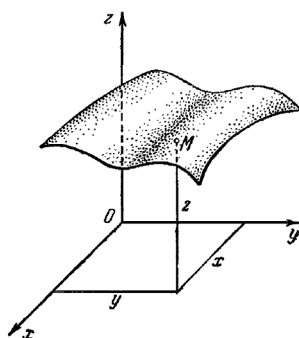


Figure II.26 : Représentation graphique en *trois dimensions* de la fonction de deux variables $z = f(x, y)$ à l'aide d'une surface.

Il existe un autre moyen très commode de représenter la fonction (II.37), qui ne nécessite qu'un dessin en deux dimensions, et qui est beaucoup utilisé en pratique. Étant donné une collection de valeurs z_1, z_2, \dots , on peut leur faire correspondre une collection de courbes dans le plan Oxy (les z_i ici sont vus comme des paramètres fixes)

$$z_1 = f(x, y), \quad z_2 = f(x, y), \quad \dots$$

On les appelle les *courbes de niveau* de la fonction $z = f(x, y)$ (figure II.27). Par exemple, sur une carte de la pression atmosphérique au sol dans une région, ce sont les lignes isobares.

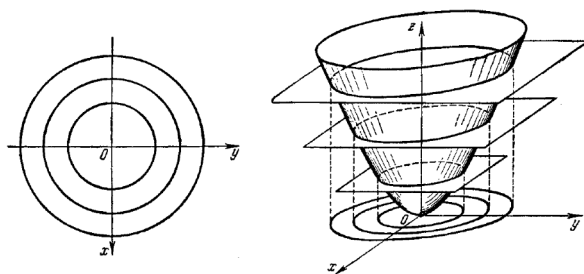


Figure II.27 : Représentation graphique en *deux dimensions* de la fonction de deux variables $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ à l'aide de courbes de niveau (dessin de gauche, comme sur une carte d'état-major).

À un endroit où les lignes de niveau, sur la représentation en deux dimensions, sont proches les unes des autres, cela indique que la fonction $z = f(x, y)$ varie rapidement d'un point d'une ligne à un point d'une autre ligne. Cela correspond en trois dimensions à une forte déclivité, ou un relief accidenté, comme le savent le lecteur et la lectrice qui ont déjà utilisé une carte d'état-major. Plusieurs courbes de niveau qui se touchent pratiquement sur tout un segment correspondent à une falaise. Inversement quand les lignes sont éloignées les unes des autres on est dans une zone en pente douce.

Sur la figure II.27, à gauche sont représentées des lignes de niveau du parabolöide $z = x^2 + y^2$. La partie droite montre comment on les construit²⁵. Dans le chapitre III, la figure III.50 montre une carte similaire des lignes de niveau de la fonction $z = xy$.

Différentielles et dérivées partielles. Faisons quelques remarques sur la différentiation des fonctions à plusieurs variables. Prenons l'exemple de la fonction à deux variables

$$z = f(x, y)$$

Si l'on fixe la valeur de y , c'est-à-dire si on considère que c'est une quantité que l'on ne va pas faire varier – qui est comme un paramètre –, alors notre fonction à deux variables devient une fonction à une seule variable x . Sa dérivée, si elle existe, s'appelle la *dérivée partielle* de f par rapport à x , et est notée ainsi :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ou} \quad f'_x(x, y)$$

Cette dernière notation, $f'_x(x, y)$, souligne que la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x est encore, en règle générale,

25. Étant donné que sur le graphique de gauche (fig. II.27) les cercles concentriques sont régulièrement espacés, cela veut dire qu'on a pris des niveaux qui ne le sont pas, mais sont de plus en plus distants les uns des autres verticalement. Sur les cartes d'état-major utilisées par les généraux et les randonneurs, l'usage est plutôt de prendre des coupes horizontales avec des niveaux verticaux régulièrement espacés, par exemple une altitude grim pant de 100 mètres en 100 mètres. L'œil perçoit alors immédiatement correctement sur la carte en 2D la topographie.

une fonction des deux variables x et y . On définit et on note de manière similaire la dérivée partielle par rapport à y .

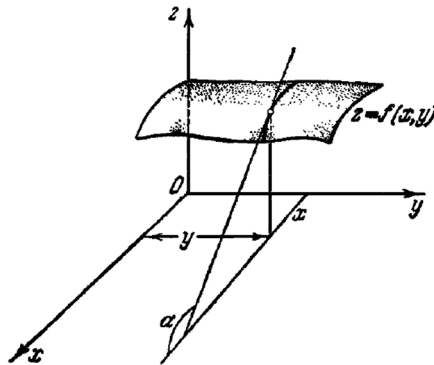


Figure II.28 : Signification géométrique de la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x .

Géométriquement, dans un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, notre fonction $f(x, y)$ est représentée par une surface. La fonction correspondante de la seule variable x , qu'on obtient quand on fixe y , a pour graphe une courbe plane dans le plan vertical parallèle à Oxz décalé à la distance y de l'origine (figure II.28). On voit que la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ est, dans ce plan vertical, la tangente (trigonométrique) de l'angle α que fait la droite tangente au point (x, y) avec l'axe décalé des x .

D'une manière générale, si on considère la fonction

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

des n variables x_1, x_2, \dots, x_n , on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i , et on note $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, la dérivée de la fonction de la variable unique x_i que l'on obtient en fixant toutes les autres variables

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

On peut dire que la dérivée partielle d'une fonction par rapport à la variable x_i est le taux de variation de la fonction dans la direction de changement x_i . On pourrait déterminer la dérivée dans une direction quelconque, qui ne correspond pas à l'un ou l'autre des axes de coordonnées, mais nous allons laisser cette question de côté.

Exemples :

$$1) z = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$2) u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Parfois il est nécessaire de calculer la dérivée partielle d'une dérivée partielle. Cela s'appelle une dérivée partielle d'ordre deux. Pour les fonctions à deux variables, il y en a quatre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Néanmoins, dans le cas où les dérivées sont continues, on peut montrer que la seconde et la troisième de ces dérivées du second ordre (appelées dérivées mixtes) sont identiques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Par exemple, en reprenant le premier exemple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^2}$$

La lectrice et le lecteur peuvent vérifier par eux-mêmes que les deux dérivées mixtes effectivement coïncident.

Pour les fonctions à plusieurs variables, exactement comme nous l'avons fait pour celles à une variable, nous pouvons introduire le concept de différentielle.

Prenons pour être précis la fonction à deux variables

$$z = f(x, y)$$

Si elle a des dérivées partielles continues, alors on peut montrer que sa différentielle

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

qui dépend des différentielles Δx et Δy , peut être exprimée sous la forme

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les deux dérivées partielles de la fonction au point (x, y) , et la quantité α dépend de Δx et Δy . En outre $\alpha \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta y \rightarrow 0$.

La somme des deux premiers termes

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

dépend linéairement de Δx et Δy et s'appelle la *différentielle de la fonction*. (D'une manière générale une fonction de la forme $Ax + By + C$, où A , B et C sont des constantes, est dite linéaire en x et y . Si $C = 0$ elle est même dite linéaire homogène. Ici nous omettons le terme « homogène ».)

Le troisième terme, par la présence du facteur α qui tend vers zéro en même temps que Δx et Δy , est un infiniment petit d'ordre supérieur à la quantité

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

qui mesure le déplacement par rapport au point (x, y) .

Voici un exemple d'utilisation du concept de différentielle. La période d'oscillation d'un pendule est donnée par la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

où l est la longueur du pendule, et g l'accélération due à la pesanteur terrestre. Supposons que nous connaissions l et g avec des erreurs respectivement égales à Δl et Δg . Alors l'erreur que nous allons faire en calculant T sera l'accroissement ΔT , correspondant aux accroissements Δl et Δg des arguments l et g . En remplaçant ΔT par dT , on va avoir

$$\Delta T \approx dT = \pi \left(\frac{\Delta l}{\sqrt{lg}} - \frac{\sqrt{l}\Delta g}{\sqrt{g^3}} \right)$$

Nous ne connaissons pas les signes de Δl et Δg , mais on a clairement une borne supérieure pour ΔT avec l'inégalité²⁶

$$|\Delta T| \leq \pi \left(\frac{|\Delta l|}{\sqrt{lg}} + \sqrt{\frac{l}{g^3}} |\Delta g| \right)$$

d'où, en divisant de part et d'autre par T , l'on tire

$$\frac{|\Delta T|}{T} \leq \left(\frac{|\Delta l|}{l} + \frac{|\Delta g|}{g} \right)$$

Ainsi on peut pratiquement escompter que l'erreur relative sur T sera au plus égale à la somme des erreurs relatives sur l et g .

Par souci de symétrie, comme dans le cas d'une différentielle de fonction à une seule variable, les accroissements des variables indépendantes sont habituellement dénotés dx et dy et sont aussi appelés des différentielles. (Avec un peu de manipulations fastidieuses, on pourra montrer que c'est cohérent avec le cas où la variable x , par exemple, sera elle-même fonction d'une autre variable, et donc aura aussi une différentielle établie autrement.) Avec ces notations la différentielle d'une fonction $u = f(x, y, z)$ s'écrit

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

26. À vrai dire, $|\Delta T|$ peut légèrement excéder le membre de droite, mais seulement d'un infiniment petit d'ordre supérieur à $|\Delta l| + |\Delta g|$.

Les dérivées partielles jouent un grand rôle partout où on a affaire à des fonctions à plusieurs variables (et c'est le cas dans un très grand nombre d'applications de l'analyse à des problèmes de physique et de technologie). Le problème de retrouver une fonction à partir de relations satisfaites par ses dérivées partielles sera le sujet du chapitre VI (tome 2).

Ci-dessous nous donnons quelques exemples parmi les plus simples d'applications des dérivées partielles en analyse.

Différentiation des fonctions implicites. Supposons que nous ayons besoin de connaître la dérivée de y par rapport à x , quand la relation entre les deux est connue seulement à travers la fonction implicite

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{II.38})$$

entre les deux variables. Si x et y satisfont l'équation (II.38) et nous donnons un accroissement Δx à la première variable, alors la seconde va devoir varier d'un accroissement Δy de façon à ce que les points $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ continuent à satisfaire (II.38). Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \alpha \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De là, à la seule condition que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Nous avons trouvé le moyen de calculer la dérivée d'une fonction définie par une relation implicite entre y et x , sans avoir eu à résoudre d'abord l'équation (II.38) afin d'exprimer y en fonction de x . (Nous avons supposé que $F(x, y)$ avait des dérivées continues par rapport à x et y .)

Problèmes de maximum et de minimum. Si une fonction, mettons à deux variables, $z = f(x, y)$, au point (x_0, y_0) atteint un maximum, c'est-à-dire que quel que soit (x, y) dans le voisinage de (x_0, y_0) , on a $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, alors ce point doit aussi être un maximum de la courbe obtenue en coupant la surface $z = f(x, y)$ par le plan vertical passant par (x_0, y_0) et parallèle au plan Oxz (retourner à la figure II.28 pour visualiser l'opération) ; et la même chose doit être vraie pour la section avec le plan parallèle au plan Oyz . Par conséquent en ce point-là les dérivées partielles satisfont forcément les conditions suivantes

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0 \quad (\text{II.39})$$

Les mêmes conditions doivent être vérifiées en un minimum local. Les minimums et maximums locaux sont donc à rechercher avant tout parmi les points où les conditions (II.39) sont satisfaites. (En outre – comme dans le cas à une variable – nous ne devons pas oublier les points sur la frontière du domaine de définition de la fonction, ainsi que les points, s'il en existe, où elle n'a pas de dérivée).

Afin d'établir si en un point (x, y) qu'on a trouvé, où les conditions (II.39) sont satisfaites, il s'agit réellement d'un maximum ou d'un minimum, on utilise le plus souvent diverses considérations indirectes. Par exemple, si pour une raison ou une autre on sait que la fonction est différentiable et atteint un minimum à l'intérieur de la région et il n'y a qu'un seul point où les conditions (II.39) sont satisfaites, alors manifestement le minimum est atteint en ce point-là.

Supposons, par exemple, qu'il faille fabriquer une boîte parallélépipédique rectangulaire en fer-blanc, sans couvercle, de volume donné V avec le moins de matière possible (mesurée par la surface des faces et du fond). Si les côtés de la base sont notés par x et y , alors sa hauteur h est égale à V/xy : par conséquent la surface S est donnée par la fonction

$$S = xy + \frac{V}{xy}(2x + 2y) = xy + 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad (\text{II.40})$$

des deux variables x et y . Puisque x et y doivent être positifs dans ce problème, la question se ramène à trouver le minimum de la fonction $S(x, y)$ parmi les points (x, y) formant le premier quadrant du plan cartésien avec le repère Oxy . Désignons ce quadrant par la lettre G .

Si le minimum est atteint en un certain point du domaine G , alors les dérivées partielles doivent y être égales à zéro

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x} &= y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= x - \frac{2V}{y^2} = 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire $yx^2 = 2V$, $xy^2 = 2V$, d'où l'on tire que les dimensions de la boîte doivent être

$$x = y = \sqrt[3]{2V} \quad \text{et} \quad h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \quad (\text{II.41})$$

Nous avons résolu le problème, mais n'avons pas tout à fait substantié notre réponse. Un mathématicien pointilleux nous dirait : « Vous avez fait dès le départ fait l'hypothèse que, dans les conditions imposées, une boîte avec une surface minimale existait, et, fort de cette hypothèse, vous avez trouvé ses dimensions. En réalité vous avez seulement démontré l'assertion suivante : si, sur le domaine G , il existe un point (x, y) où la fonction S atteint un minimum, alors les coordonnées du point sont nécessairement celles données par (II.41). Démontrez d'abord que sur le domaine G la fonction S passe effectivement par un minimum, alors je reconnaitrai qu'il est à l'endroit que vous avez trouvé. » Cette remarque est tout à fait légitime si l'on considère, par exemple, que notre fonction S , comme nous le verrons plus loin, n'a pas de maximum sur le domaine G . Montrons donc comment on peut s'assurer que, dans le cas qui nous concerne, notre fonction, en un certain point (x, y) du domaine G , atteint réellement un minimum.

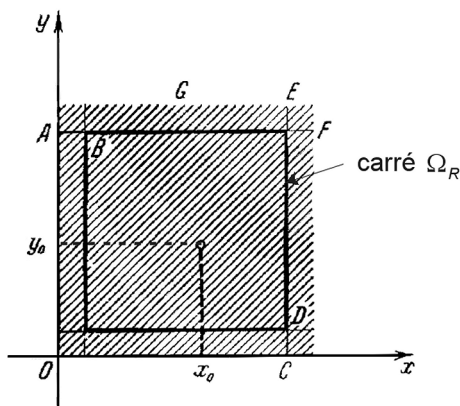


Figure II.29 : Démonstration que les formules (II.41) sont bien la solution du problème de minimisation de la fonction (II.40).

Nous allons nous fonder sur un théorème qu'on démontre de manière rigoureuse en analyse et qui dit ceci : si une fonction f , à une ou plusieurs variables, est continue partout sur un certain domaine borné H , contenant sa frontière, alors dans H il existe toujours au moins un point où la fonction atteint un minimum (et aussi un maximum). À l'aide de ce résultat il devient facile de compléter notre raisonnement.

Commençons par choisir un point quelconque (x_0, y_0) dans le domaine G ; et appelons N la valeur de la fonction S en ce point : $S(x_0, y_0) = N$. Choisissons par ailleurs un nombre R tel que $R > N$ et $2VR > N$ et le carré Ω_R décrit ci-après contienne (x_0, y_0) . Le carré Ω_R est montré sur la figure II.29 avec les côtés en ligne continue épaisse : le point A est à l'ordonnée R , le point C à l'abscisse R , et on a pris aussi $AB = CD = \frac{1}{R}$.

Nous allons calculer une borne inférieure de notre fonction $S(x, y)$ pour les points de G situés en dehors du carré Ω_R . D'abord, pour les points dont l'abscisse x est inférieure à $\frac{1}{R}$ on a

$$S(x, y) = xy + 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) > 2V \frac{1}{x} > 2VR > N$$

Idem pour les points d'ordonnée $y < \frac{1}{R}$. Cela règle la question des points dans les bandes horizontale et verticale entre le carré et les axes.

Regardons maintenant les points au-dessus ou à droite du carré, et en dehors des bandes précédentes. Pour les points d'abscisse $x > \frac{1}{R}$ et situés au-dessus de la ligne AF ou d'ordonnée $y > \frac{1}{R}$ et situés à droite de la ligne CE , on a

$$S(x, y) > xy > \frac{1}{R}R^2 = R > N$$

Donc pour tous les points (x, y) du quadrant G strictement en dehors du carré Ω_R on a $S(x, y) > N$. Pour finir, quelque part dans le carré Ω_R (y compris ses frontières – c'est-à-dire le carré « fermé »), en vertu du résultat sur lequel on se fonde, la fonction S a un minimum. Alors, puisqu'au point (x_0, y_0) , qui est dans le carré, on a $S(x_0, y_0) = N$, ce minimum de S est inférieur ou égal à N . Et c'est donc bien aussi le minimum de S dans tout le quadrant G . On a ainsi démontré que sur le domaine G la fonction S passe effectivement par un minimum, ce qui satisfait notre mathématicien pointilleux.

La procédure ci-dessus est un exemple de la façon dont on peut raisonner quand on recherche le maximum ou le minimum d'une fonction sur un domaine qui n'est pas borné. Ici c'était tout le premier quadrant.

Formule de Taylor. Les fonctions à plusieurs variables peuvent, comme les fonctions à une variable, être représentées par une formule de Taylor, appelée aussi un « développement de Taylor ». Par exemple, le développement de la fonction $u = f(x, y)$ au voisinage du point (x_0, y_0) , si nous nous limitons aux termes du premier et du second degré, en $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, a l'allure suivante

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + [f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)] + \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \\ & + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + R_3 \end{aligned}$$

De surcroît, si les dérivées partielles du second ordre de la fonction $f(x, y)$, qui apparaissent dans cette formule, sont continues, alors le terme résiduel R_3 tend vers zéro plus vite que

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

c'est-à-dire plus vite que le carré de la distance r entre les points (x, y) et (x_0, y_0) quand $r \rightarrow 0$. La formule de Taylor fournit un moyen très général de déterminer de manière approchée les valeurs de nombreuses fonctions.

Observons que nous pouvons utiliser le développement de Taylor pour répondre aussi à la question posée plus haut, de savoir si en un point où ses dérivées partielles satisfont les conditions $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, la fonction a un maximum ou un minimum. En effet, si ces conditions sont satisfaites en un certain point (x_0, y_0) , alors pour les points (x, y) proches de (x_0, y_0) , la valeur de la fonction f , en vertu de son développement de Taylor, diffère de $f(x_0, y_0)$ par la quantité

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \frac{1}{2!} [A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2] + R_3 \end{aligned} \tag{II.42}$$

où A , B et C dénotent respectivement les dérivées partielles d'ordre deux f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yy} au point (x_0, y_0) .

S'il se trouve que la fonction

$$\Phi(x, y) = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$$

pour toute paire de valeurs $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, pas ensemble égales à zéro, est toujours positive, alors dans ce cas tout le membre de droite de l'équation (II.42) dans un voisinage suffisamment petit du point (x_0, y_0) sera positif, puisque la valeur absolue du terme résiduel R_3 pourra être rendue plus petite que $\frac{1}{2}\Phi(x, y)$. Cela voudra dire qu'en ce point (x_0, y_0) la fonction f atteint un minimum local. À l'inverse, pour la même raison, si au voisinage de (x_0, y_0) la fonction $\Phi(x, y)$ est

toujours négative alors f au point (x_0, y_0) aura un maximum local.

Dans les cas plus compliqués, il faut regarder les termes suivants dans le développement de Taylor.

Les problèmes de maximum et de minimum de fonctions à trois variables ou plus sont étudiés et résolus exactement de la même façon. Comme exercice, le lecteur et la lectrice peuvent démontrer que si, dans l'espace à trois dimensions, on a les n masses ponctuelles

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

situées aux points donnés

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \dots, P_n(x_n, y_n, z_n)$$

alors le moment d'inertie M de ce système, par rapport à un point quelconque $P(x, y, z)$, qui est défini comme la somme des carrés des distances entre le point P et les n points donnés, pondérée par les masses,

$$M(x, y, z) = \sum_{i=1}^n m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]$$

atteindra son minimum quand P sera au point appelé le *centre de gravité* du système, qui a les coordonnées

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Maximum et minimum sous contrainte. Pour les fonctions à plusieurs variables, on peut formuler diverses variantes de problèmes de maximum et minimum. Voyons un exemple simple. Supposons que parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle de rayon R , nous voulions trouver celui qui a la plus grande surface. La surface d'un rectangle est égale au produit xy de ses côtés; ce sont deux valeurs positives qui ici, en outre, sont liées par la relation $x^2 + y^2 = (2R)^2$ comme on peut le voir sur la figure II.30. Ainsi, il faut trouver le maximum de la fonction $f(x, y) = xy$ seulement parmi les valeurs x et y qui satisfont la relation $x^2 + y^2 = 4R^2$.

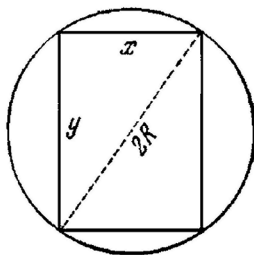


Figure II.30 : Recherche du rectangle de surface maximum.

Des problèmes similaires où il faut trouver le maximum (ou minimum) d'une certaine fonction $f(x, y)$ seulement parmi les valeurs x, y , qui sont liées entre elles par une certaine relation $\phi(x, y) = 0$, appelée aussi *condition* ou *contrainte*, sont très fréquents en pratique.

Bien sûr, on peut essayer de résoudre l'équation $\phi(x, y) = 0$ en y , puis substituer l'expression en x obtenue à la place de y dans $f(x, y)$ et chercher de la manière habituelle en quelle valeur de x la fonction devenue d'une seule variable a un maximum. Mais cette voie est généralement difficile, et parfois impossible.

Pour résoudre de tels problèmes, une méthode infiniment plus commode a été inventée en analyse, appelée la *méthode des multiplicateurs de Lagrange*. L'idée est très simple. Considérons la fonction

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

où λ est une constante arbitraire. Il est clair que pour les nombres x et y satisfaisant la condition $\phi(x, y) = 0$, les valeurs de $F(x, y)$ coïncident avec celles de $f(x, y)$.

Pour la fonction $F(x, y)$ nous allons chercher son maximum sans imposer de condition liant x et y . Au point maximum les équations suivantes sont nécessairement satisfaites,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

(Nous parlons, bien sûr, d'un maximum atteint à l'intérieur du domaine de définition de la fonction $F(x, y)$. Et les fonctions $f(x, y)$ et $\phi(x, y)$ sont supposées différentiables.) Les équations ci-dessus se réécrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.44})$$

Les valeurs de x et y au point maximum de $F(x, y)$ font partie des solutions du système d'équations (II.43) et (II.44), et dépendent naturellement du coefficient λ qui y apparaît. Supposons maintenant que nous puissions choisir le nombre λ de telle façon que les coordonnées du point maximum de F satisfassent l'équation

$$\phi(x, y) = 0 \quad (\text{II.45})$$

Alors ce point sera aussi celui où est atteint le maximum dans le problème initial où il faut maximiser f avec la contrainte $\phi = 0$.

En effet, géométriquement notre problème peut se comprendre de la manière suivante.

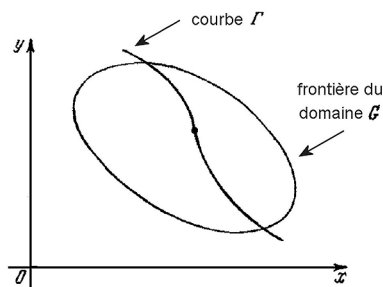


Figure II.31 : Explication géométrique de la méthode des multiplicateurs de Lagrange

La fonction $f(x, y)$ est définie sur un certain domaine G (figure II.31). L'équation de la contrainte $\phi(x, y) = 0$ correspond généralement à une certaine courbe Γ . On doit trouver le point où la fonction $f(x, y)$ prend sa valeur maximale sur la courbe Γ . Si en un point de la courbe Γ on atteint un maximum local de $F(x, y)$ (indépendamment de toute contrainte), alors $F(x, y)$ n'augmentera pour aucun petit déplacement dans quelque direction que ce soit depuis ce point ; ce sera vrai en particulier pour un petit déplacement le long de la courbe Γ . Mais pour les déplacements le long de Γ les valeurs de $F(x, y)$ coïncident avec celles de $f(x, y)$; cela veut dire que pour des petits déplacements sur la courbe la fonction $f(x, y)$ n'augmentera pas, et elle aura donc en ce point un maximum.

Ces considérations suggèrent une solution simple au problème. Nous posons toutes les équations (II.43), (II.44), (II.45) (la dernière étant la contrainte elle-même) ; nous résolvons le système en x, y et λ ; on obtient une ou plusieurs solutions

$$(x_1, y_1, \lambda_1), (x_2, y_2, \lambda_2), \dots \quad (\text{II.46})$$

À la collection des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ nous rajoutons les points où la courbe Γ , en sortant du domaine G , coupe sa frontière, après quoi nous sélectionnons parmi tous ces candidats celui où la fonction $f(x, y)$ atteint son maximum (ou son minimum si on cherchait un minimum).

Bien sûr, notre description suggestive ne constitue pas une démonstration de la validité de cette technique. Nous n'avons en effet pas prouvé qu'un point où $f(x, y)$ atteint un maximum local par rapport aux autres points sur la courbe de la contrainte Γ , peut toujours être obtenu comme un point où la fonction $F(x, y)$ est maximum pour un certain λ . On peut cependant prouver – et c'est dans tous les manuels d'analyse – que tous les points (x_0, y_0) où $f(x, y)$ atteint un maximum local sur la courbe Γ seront trouvés par la méthode de Lagrange, à la condition qu'en ces points les deux dérivées partielles $\phi'_x(x_0, y_0)$ et $\phi'_y(x_0, y_0)$ ne s'annulent pas en même

temps. (Dans le tome 1 du *Cours de mathématiques supérieures* de Vladimir I. Smirnov en cinq volumes²⁷, le lecteur et la lectrice peuvent trouver un exemple simple où la méthode conduit à une solution erronée si nous appliquons les multiplicateurs de Lagrange aveuglément sans prêter attention au fait qu'à côté des points susmentionnés, il peut y en avoir d'autres qui satisfont la contrainte (II.45) mais aussi où $\phi'_x(x_0, y_0) = 0$ et $\phi'_y(x_0, y_0) = 0$.)

Résolvons avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange l'exemple au début de la section. Dans ce cas la fonction à maximiser est $f(x, y) = xy$ et la contrainte est $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 4R^2$.

Nous posons les équations (II.43), (II.44) et (II.45)

$$y + 2\lambda x = 0 \tag{17}$$

$$x + 2\lambda y = 0 \tag{18}$$

$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

d'où, étant donné que x et y sont positifs, on trouve la solution unique

$$x = y = R\sqrt{2} \quad \left(\lambda = -\frac{1}{2} \right)$$

On voit ainsi que la surface maximum est atteinte quand le rectangle est un carré inscrit dans le cercle.

La méthode de Lagrange s'étend au cas de fonctions à trois variables ou davantage. Dans ces cas-là, il peut y avoir plusieurs contraintes additionnelles similaires à (II.45) (mais elles doivent être en nombre inférieur au nombre de variables) ; elles sont rajoutées dans le système d'équations, et on ajoute aussi le nombre correspondant de multiplicateurs auxiliaires : λ_1, λ_2 , etc.

Voici d'autres exemples de problèmes de maximum et minimum :

27. Disponibles en français publiés par les Éditions de Moscou.

Exemple 1. Pour quelle hauteur h et quel rayon r le réservoir cylindrique ouvert en haut, de capacité donnée V , nécessite pour sa construction le moins de matériau possible, c'est-à-dire que la surface de son enveloppe latérale plus celle de sa base sera minimale ?

On voit tout de suite que le problème se ramène à celui de trouver le minimum de la fonction des deux variables r et h

$$f(r, h) = 2\pi r h + \pi r^2$$

soumises à la contrainte $\pi r^2 h = V$, que l'on peut réécrire sous la forme

$$\phi(r, h) = \pi r^2 h - V = 0$$

Exemple 2. Un point en mouvement doit passer du point A au point B sur une trajectoire composée de deux segments rectilignes avec changement éventuel de direction en un point M d'une frontière droite fixe DD' (fig. 32). Sur le tronçon AM le point se déplace à la vitesse v_1 , et sur le tronçon MB à la vitesse v_2 . Où placer, sur la frontière DD' , le point M afin que le chemin complet de A à B soit parcouru en le temps le plus bref possible ?

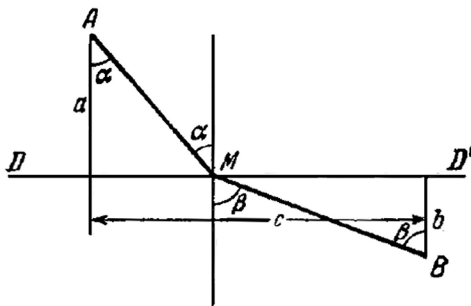


Figure II.32 : Minimisation du temps de parcours de A à B à travers deux milieux à vitesse différente.

Nous prenons pour inconnues les angles α et β montrés sur la figure. Les distances a et b , respectivement des points A et B à la droite DD' , ainsi que la distance c séparant les projections de A et de B sur cette droite, sont trois paramètres connus de nous. Le temps de parcours complet est exprimé, comme on peut facilement le voir, par la formule

$$f(\alpha, \beta) = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$$

Il faut trouver le minimum de cette expression, quand α et β sont soumis à la contrainte

$$a \tan \alpha + b \tan \beta = c$$

Le lecteur et la lectrice peuvent résoudre par eux-mêmes ces deux exemples en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Dans le second exemple, il est aisé de vérifier que l'emplacement le plus favorable pour M est le point où l'on a

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

C'est la loi de Snell-Descartes bien connue décrivant la réfraction d'un rayon lumineux. Ainsi quand un rayon lumineux passe d'un milieu à un autre (par exemple de l'eau à l'air, ou bien d'un type de verre à un autre) sa trajectoire change de direction lors du franchissement de la frontière entre les deux milieux de telle sorte que la trajectoire totale entre A et B soit parcourue en le temps minimum. Des conclusions de ce genre n'ont pas seulement un intérêt mathématique, mais ont une grande importance en science ; elles montrent comment les sciences exactes appliquées à la nature pénètrent profondément dans ses lois.

Finalement, soulignons que les facteurs multiplicatifs, introduits pour résoudre les problèmes de maximisation ou minimisation par la méthode de Lagrange, ne restent pas seulement des nombres auxiliaires. Dans chaque cas particulier ils

se révèlent être étroitement liés au phénomène étudié et avoir une signification physique importante²⁸.

II.13 Généralisation du concept d'intégrale

Dans la section II.10 nous avons appelé « intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a, b]$ » la limite, quand elle existe, de la somme

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

quand on prend une partition de plus en plus fine du segment $[a, b]$, c'est-à-dire quand la taille du plus grand intervalle Δx_i dans la partition tend vers zéro. En dépit du fait que la classe de fonctions $f(x)$ pour lesquelles cette limite existe (la classe des « fonctions intégrables ») est très vaste, qu'elle contient toutes les fonctions continues et beaucoup de fonctions discontinues, cette classe de fonctions souffre d'un sérieux handicap. En additionnant, soustrayant, multipliant, et sous certaines conditions divisant, les valeurs de deux fonctions intégrables $f(x)$ et $\phi(x)$, nous obtenons, comme on peut le démontrer, encore une fonction intégrable. Pour $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ c'est vrai dans tous les cas où la quantité $\frac{1}{\phi(x)}$ reste bornée sur le segment $[a, b]$. Mais si nous avons construit une certaine fonction par passage à la limite avec une suite de fonctions intégrables $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ c'est-à-dire que pour tous les x dans le segment $[a, b]$ on a défini $f(x)$ comme suit

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

28. Par exemple, en thermodynamique statistique, l'entropie d'un système est calculée en maximisant une certaine quantité $\mathcal{E}(P) = -\sum_i P_i \log P_i$ sous les deux contraintes $\sum_i P_i = 1$ et $\sum_i P_i E_i = E$ où les E_i et E sont des paramètres et les inconnues sont les P_i . Les deux multiplicateurs, généralement notés α et β , ont une signification physique. Notamment β est l'inverse de la température. Voir le cours (en anglais) de Leonard Susskind https://www.lapasserelle.com/statistical_mechanics en particulier les chapitres 2, 3 et 4.

alors la fonction $f(x)$ obtenue n'est pas nécessairement intégrable.

Dans diverses situations, ce problème et d'autres problèmes entraînent de grandes complications dans les procédures mathématiques, qui d'une manière générale font un large usage de la technique du passage à la limite.

La façon de s'en sortir a été de généraliser le concept d'intégrale. La plus importante de ces généralisations est l'intégrale de Lebesgue, que le lecteur et la lectrice rencontreront dans le chapitre XV (volume 3), consacré à la théorie des fonctions d'une variable réelle. Nous devons pour l'instant porter notre attention vers des généralisations dans d'autres directions de l'intégrale qui sont très importantes en pratique.

Intégrales multiples. Nous nous sommes familiarisés avec le processus d'intégration d'une fonction d'une variable sur un domaine unidimensionnel, c'est-à-dire un segment. Mais un processus analogue peut être mis en œuvre pour les fonctions de deux, trois ou plus généralement plusieurs variables définies sur des domaines avec un nombre de dimensions correspondant.

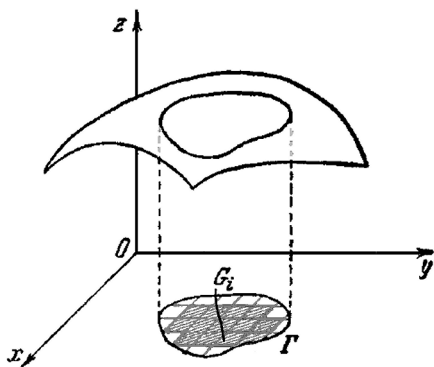


Figure II.33 : Schéma général de l'intégration multiple : surface $z = f(x, y)$ et région G dans le plan Oxy délimitée par la courbe Γ . La partition formée par les petits rectangles G_i recouvre presque totalement la région G .

Considérons, par exemple, dans un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ repérant l'espace, une surface

$$z = f(x, y)$$

et dans le plan horizontal Oxy une région G , ayant pour frontière une courbe Γ (figure II.33).

Supposons que l'objectif soit de calculer le volume délimité par notre surface, le plan Oxy et la forme cylindrique construite sur la courbe Γ avec pour génératrice la direction Oz . Pour résoudre ce problème, nous divisons la région plate G en une multitude de petites sections à l'aide d'une grille construite avec des lignes parallèles aux axes Ox et Oy , et nous renumérotions ces petites sections

$$G_1, G_2, \dots, G_n$$

chacune étant un petit²⁹ rectangle plein. Si la grille est suffisamment fine, alors la collection des petits rectangles couvrira presque toute la région G . Dans chaque rectangle nous choisissons un point quelconque de coordonnées (ξ_i, η_i) produisant ainsi la collection

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$$

et, adoptant pour la simplicité des notations la convention que chaque G_i dénote non seulement un rectangle mais aussi la mesure de sa surface, nous construisons la somme

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1, \eta_1) G_1 + f(\xi_2, \eta_2) G_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) G_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) G_i \quad (\text{II.47}) \end{aligned}$$

29. Certains enseignants critiquent l'utilisation du mot « petit » en mathématiques, en particulier en intégration, car petit n'a de sens qu'en relatif. « Le nombre 3 est-il grand ou petit ? » demandent-ils. Mais ici « petit » doit tout simplement être entendu comme « quelque chose qu'on va faire tendre vers zéro ». Autrement dit, c'est un infinitésimal.

Il est clair, si la surface est continue, qu'avec une grille suffisamment fine on peut rendre cette somme aussi proche que l'on veut du volume recherché V . Nous obtiendrons exactement notre volume si nous passons à la limite de l'expression (II.47) en prenant une grille de plus en plus fine (c'est-à-dire dont la diagonale du plus grand rectangle G_i tend vers zéro)

$$\lim_{\max d(G_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) G_i = V \quad (\text{II.48})$$

D'un point de vue analytique, pour déterminer – et à vrai dire *définir* – le volume V , il a été nécessaire d'effectuer une certaine opération mathématique sur la fonction $f(x, y)$ et la région G où elle est donnée, montrée du côté gauche de l'équation (II.48). Cette opération porte le nom d'intégration de f sur la région G , et le résultat est *l'intégrale de la fonction f sur la région G* . Il est noté comme ceci

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\max d(G_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) G_i \quad (\text{II.49})$$

De la même façon, on peut calculer l'intégrale d'une fonction à trois variables sur une région formant un volume dans l'espace (comme dans le cas précédent la région G formait une surface dans le plan Oxy). La façon de procéder est à nouveau de partitionner la région G cette fois-ci en une multitude de petits parallélépipèdes rectangles à l'aide de plans parallèles à ceux du système de coordonnées cartésiennes. À nouveau nous ne prenons que les petits parallélépipèdes complets (omettant ceux entamés par la frontière de G) ; nous les renumérotons

$$G_1, G_2, \dots, G_n$$

Nous obtenons ainsi un assemblage de « briques » remplissant approximativement G . Dans chaque brique G_i nous choisissons un point quelconque, obtenant ainsi la collection de points

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

Et nous construisons la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) G_i \quad (\text{II.50})$$

où G_i est non seulement le nom mais représente aussi ici le volume de la brique i . Finalement, l'intégrale de $f(x, y, z)$ sur la région G est définie comme limite suivante

$$\lim_{\max d(G_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) G_i = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{II.51})$$

quand la partition en 3D devient de plus en plus fine, c'est-à-dire toutes les briques deviennent de plus en plus petites.

Regardons un exemple. Imaginons un corps occupant une région G de l'espace à trois dimensions, et qui est rempli d'une masse de matière non homogène. On suppose que la fonction $\rho(x, y, z)$, exprimant la densité de matière, ou si l'on préfère de masse, en chaque point de G , est connue. La densité de masse $\rho(x, y, z)$ au point (x, y, z) est définie comme la limite vers laquelle tend le ratio entre la masse d'une petite région contenant le point (x, y, z) et son volume, quand on fait tendre ce volume vers zéro. (Plus précisément on fait tendre le « diamètre » de la petite région – c'est-à-dire la plus grande distance entre deux de ses points – vers zéro, afin de ne pas autoriser des volumes tendant vers zéro qui pourraient néanmoins avoir des formes minces et étirées et contenir des points éloignés.) Pour calculer la masse totale du corps G , il est naturel de raisonner de la manière suivante. Divisons la région occupée par G en petites sections à l'aide de séries de plans parallèles aux trois plans des coordonnées, et renumérotions les parallélépipèdes obtenus

$$G_1, G_2, \dots, G_n$$

Si les plans opérant la partition sont suffisamment proches les uns des autres, nous ferons seulement une petite erreur en omettant les masses des petites régions pas totalement parallélépipédiques situées au bord du découpage. Et la masse de

chaque petite région régulière (un petit parallélépipède complet) G_i est calculée approximativement comme

$$\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) G_i$$

où (ξ_i, η_i, ζ_i) est un point quelconque dans G_i . Le résultat donnant une valeur approximative de la masse totale M sera

$$S_n = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) G_i$$

La masse exacte est, manifestement, la limite de cette somme quand la partition devient de plus en plus fine (c'est-à-dire que la plus grande diagonale des parallélépipèdes G_i tend vers zéro). Autrement dit

$$M = \iiint_G \rho(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\max d(G_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) G_i$$

Les intégrales (II.49) et (II.51) portent respectivement le nom d'*intégrale double* et d'*intégrale triple*.

Analysons un autre problème (que le calcul d'un volume montré sur la figure II.33) conduisant à une intégrale double. Imaginons de l'eau s'écoulant sur une surface plane. En outre, en chaque endroit de cette surface, de l'eau peut aussi remonter du sous-sol, avec un débit d'intensité différente $f(x, y)$ selon les endroits; et inversement de l'eau peut être absorbée dans le sous-sol. Sélectionnons une région G bornée par un contour (figure II.34). Et supposons que nous connaissions l'intensité du débit $f(x, y)$, c'est-à-dire la quantité d'eau résurgente ou au contraire absorbée par le sol par minute et par cm^2 , en chaque point de G . (On a $f(x, y) > 0$ où de l'eau remonte du sous-sol, et $f(x, y) < 0$ où de l'eau est absorbée.) Quelle quantité nette totale d'eau apparaît par minute dans l'ensemble de la région G ?

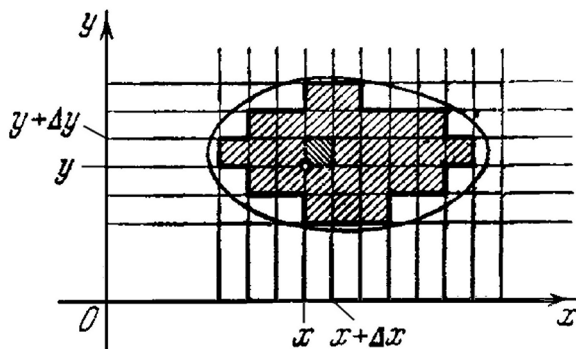


Figure II.34 : Région de calcul d'une intégrale double.

Si nous divisons la région G en petites sections et calculons la quantité approximative d'eau apparaissant dans chaque section, en faisant l'hypothèse que $f(x, y)$ y est constante, et passons à la limite en augmentant indéfiniment la finesse de la partition, nous obtiendrons l'expression de la quantité totale d'eau rendue par le sol comme l'intégrale

$$\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$$

Les intégrales doubles furent introduites pour la première fois par Euler. Les intégrales multiples sont d'un emploi très répandu dans une grande variété de calculs et d'études. On peut montrer, mais ce n'est pas dans nos préoccupations ici, que le calcul d'une intégrale multiple, en règle générale, peut être ramené à une suite de calculs d'intégrales ordinaires à seule dimension.

Intégrale le long d'une courbe et intégrale sur une surface. Enfin, il faut observer que d'autres généralisations de l'intégrale sont encore possibles. Ainsi, par exemple, le problème de déterminer le travail effectué par une force appliquée sur un point en mouvement le long d'une trajectoire incurvée conduit naturellement à une intégrale le long d'une courbe, ce

qu'on appelle une *intégrale curviligne*. Et le problème de trouver la charge électrique totale d'une surface ayant des creux et des bosses sur laquelle on connaît la densité de charge, distribuée de manière continue sur toute son étendue, conduit au concept d'intégrale sur une surface.

Soit, par exemple, le flux d'un fluide, parallèle à l'axe des x , à travers un espace G (figure II.35), et la vitesse d'une particule du fluide au point (x, y) , représentée par la fonction $P(x, y)$. On suppose que le phénomène est invariant avec l'altitude z , ainsi le problème se ramène à deux dimensions. Si nous voulons déterminer la quantité de fluide s'écoulant par minute à travers la frontière de l'espace G , c'est-à-dire le contour Γ , on peut raisonner de la manière suivante. (Plus précisément – si on ne veut pas perdre de vue que le flux prend place en réalité dans l'espace à trois dimensions – on va regarder le flux à travers une section cylindrique de hauteur unité, ayant pour base le contour Γ .)

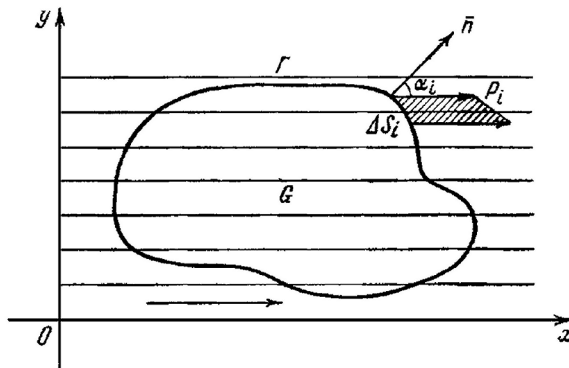


Figure II.35 : Exemple d'intégrale curviligne. Flux parallèle à l'axe des x d'un fluide à travers un espace G et sa frontière Γ .

Nous divisons le contour Γ en sections Δs_i . La quantité d'eau s'écoulant à travers une section Δs_i est approximativement égale à la petite bande de liquide hachurée sur la figure II.35,

comme si elle avait filtré en une minute par cette section du contour. Mais la surface du parallélogramme hachuré est

$$P_i(x, y) \cdot \Delta s_i \cdot \cos \alpha_i$$

où α_i est l'angle entre la direction positive \bar{x} de l'axe des x et la direction \bar{n} normale au contour au point (x, y) pointant vers l'extérieur. « Normale au contour au point (x, y) » veut dire la même chose que perpendiculaire à la tangente en ce point. La section Δs_i est elle-même approximativement droite et parallèle à cette tangente. En sommant les surfaces de tous ces parallélogrammes et en passant à la limite quand on partitionne le contour Γ en sections de plus en plus nombreuses et petites, on obtient la quantité d'eau s'écoulant à travers tout le contour Γ en une minute. Elle est donnée par l'expression

$$\int_{\Gamma} P(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) ds$$

qui est une intégrale curviligne. Si le flux n'est pas parallèle à l'axe des x , alors la vitesse du flux aura en chaque point (x, y) une composante $P(x, y)$ le long de l'axe des x , et une composante $Q(x, y)$ le long de l'axe des y . Dans ce cas, à l'aide d'un raisonnement analogue, on montre que la quantité d'eau passant à travers tout le contour Γ sera égale à

$$\int_{\Gamma} [P(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{y})] ds$$

Étant donné que pour un petit déplacement sur la courbe, la différentielle de y est égale à $\cos(\bar{n}, \bar{x}) ds$ et la différentielle dx est égale à $-\cos(\bar{n}, \bar{y}) ds$, cette intégrale est souvent écrite sous la forme

$$\int_{\Gamma} [P(x, y) dy - Q(x, y) dx]$$

Quand il s'agit, dans l'espace à trois dimensions, de calculer l'intégrale sur toute une *surface incurvée* G ³⁰ d'une

30. C'est-à-dire pour parler familièrement qui peut être gondolée, et qui peut être aussi par exemple l'enveloppe d'un volume.

certaine fonction à trois variables f ayant en chaque point $M(x, y, z)$ la valeur $f(M)$, alors on partitionne la surface G en petites sections de surface $\Delta\sigma_i$, dans chacune desquelles on prend un point M_i et on calcule la limite de la somme

$$\lim \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i$$

avec une partition de plus en plus fine de la surface G sur laquelle l'intégration est effectuée. Cette *intégrale de surface* est notée

$$\iint_G f(x, y, z) d\sigma$$

Pour les intégrales multiples, les intégrales curvilignes et les intégrales de surface, il existe à la fois des méthodes générales pour leur calcul et leur transformation en d'autres intégrales, et aussi pour leur approximation.

Formule d'Ostrogradski. Des relations très importantes entre une intégrale double dans toute une région du plan et une intégrale curviligne sur la frontière de cette région, ou entre une intégrale triple dans tout un volume de l'espace et une intégrale double, de surface, sur l'enveloppe de ce volume, ont été trouvées dans un cadre très général au milieu du XIX^e siècle par M. V. Ostrogradski.

Sans chercher ici à prouver la formule générale d'Ostrogradski, qui a de très nombreuses applications, essayons d'illustrer cette formule dans un cas particulier très simple.

Imaginons un flux d'eau s'écoulant sur une partie plane du sol, avec en outre de l'eau par endroit constamment absorbée dans le sol et en d'autres endroits constamment sortant du sol. Sélectionnons une certaine région G du plan (représenté par le sol), ayant pour frontière le contour Γ , et supposons que les composantes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ de la vélocité du fluide soient connues en chaque point de la région G .

Calculons avec quelle intensité, près d'un point de coordonnées (x, y) , l'eau sort du sol (ou y entre). Pour cela consi-

dérons un petit rectangle de côtés Δx et Δy , adjacent au point (x, y) (retourner à la figure II.34 pour une illustration).

Dû à la composante $P(x, y)$ de la vitesse du flux, à travers le côté vertical gauche du petit rectangle, chaque minute, entre dans ce petit rectangle approximativement la quantité $P(x, y) \Delta y$ d'eau, et à travers le côté vertical droit, durant le même laps de temps, en sort la quantité approximative $P(x + \Delta x, y) \Delta y$. Globalement donc, mesurée par unité de surface, on aura, *en net*, à travers les côtés verticaux, gauche et droit, du petit rectangle la quantité approximative d'eau qui s'écoule, c'est-à-dire qui sort du rectangle dans la direction horizontale, suivante

$$\frac{[P(x + \Delta x, y) - P(x, y)] \Delta y}{\Delta x \Delta y}$$

Si on fait tendre Δx vers zéro, on obtient à la limite

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

De même, l'intensité du flux, autrement dit le débit³¹, avec lequel l'eau s'écoule selon l'axe des y , c'est-à-dire sort du rectangle dans la direction verticale, est mesurée par la quantité

$$\frac{\partial Q}{\partial y}$$

Cela veut dire que le débit d'eau résurgant du sol, dans le petit rectangle sera forcément égal à

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

La quantité totale d'eau sortant du sol, par unité de temps, dans toute la région G , comme nous l'avons vu plus haut, est

31. Par *débit* on entend ici la quantité d'eau par unité de temps et *par unité de surface*. C'est une sorte d'intensité surfacique de flux, comme une pression est une « intensité surfacique de force ». On obtient un flux, par unité de temps, en multipliant donc un débit par une surface, voir la formule (II.52). On obtiendrait une quantité d'eau en m^3 en multipliant ce flux par minute, par un temps.

égale à l'intégrale double de la fonction représentant le débit d'eau résurgente en chaque point du sol. On peut donc l'exprimer avec les dérivées partielles qu'on vient d'employer. La quantité totale nette d'eau sortant du sol (par unité de temps) est

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{II.52})$$

Cette quantité totale d'eau par minute doit s'écouler à travers la frontière Γ de la région G . Mais nous avons calculé plus haut cette dernière à l'aide de l'intégrale curviligne sur le contour Γ

$$\int_{\Gamma} [P(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{y})] ds \quad (\text{II.53})$$

L'identité entre les quantités (II.52) et (II.53) donne la *formule d'Ostrogradski*³² dans sa forme la plus simple à deux dimensions

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} [P(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x, y) \cos(\bar{n}, \bar{y})] ds$$

Nous avons seulement, à l'aide d'un exemple physique, apporté un éclairage sur cette formule. Elle peut être démontrée mathématiquement.

La formule d'Ostrogradski reflète un certain aspect de la réalité, que dans notre exemple nous percevons clairement comme une loi de conservation de la quantité d'un fluide incompressible.

M. V. Ostrogradski démontra une formule beaucoup plus générale établissant le lien entre une intégrale multiple sur

32. Cette formule porte aussi le nom de *formule de Green*, du nom du mathématicien anglais George Green (1793-1841) qui l'a publiée la même année qu'Ostrogradski. Beaucoup d'autres la connaissaient déjà dont Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) et Carl F. Gauss (1777-1855). George Stokes (1819-1903) a attaché son nom à une variante.

tout l'intérieur d'un volume multidimensionnel et une intégrale de multiplicité un cran en dessous sur sa frontière. En particulier pour un corps à trois dimensions G délimité par une enveloppe Γ , cette formule prend la forme

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Gamma} [P \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q \cos(\bar{n}, \bar{y}) + R \cos(\bar{n}, \bar{z})] d\sigma$$

où $d\sigma$ est un petit élément de surface.

Il est intéressant d'observer que le théorème fondamental du calcul intégral (c'est-à-dire la formule de Newton et Leibniz)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \tag{II.54}$$

(cf. équation (II.30) p. 235) peut être vu comme un cas particulier de la formule d'Ostrogradski. L'identité (II.54) relie en effet l'intégrale sur un intervalle à l'« intégrale » sur sa frontière de « dimension zéro » consistant en ses deux bornes.

On va comprendre la formule (II.54) avec l'analogie suivante. Imaginons un tuyau rectiligne de section constante $s = 1$, à travers lequel s'écoule de l'eau. En chaque point x du tuyau, la *vitesse* de l'eau est $F(x)$ (fig. II.36).

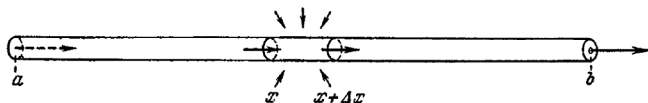


Figure II.36 : Le théorème fondamental de Newton et Leibniz vu comme un cas particulier de la formule d'Ostrogradski.

Le *tuyau est poreux* et de l'eau peut aussi s'infiltrer ou fuir avec un débit variable selon l'endroit où l'on se trouve. Si l'on

regarde la section entre x et $x + \Delta x$, alors la quantité d'eau traversant la paroi du tuyau *par unité de temps* dans cette section doit compenser la différence $F(x + \Delta x) - F(x)$, c'est-à-dire la différence entre la vitesse d'écoulement de l'eau en $F(x + \Delta x)$ et en $F(x)$ dans le tuyau. Par conséquent, par unité de temps, la quantité d'eau qui fuit (-) ou s'infiltre (+) dans cette section coïncide avec la différence $F(x + \Delta x) - F(x)$. Et l'intensité $f(x)$, qui est le ratio entre la quantité d'eau qui fuit ou s'infiltre (par unité de temps) dans la section infinitésimale $[x, x + \Delta x]$ et la longueur de cette section, c'est-à-dire Δx , satisfait la relation

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

L'accroissement du débit de l'eau entre b et a , doit être égal à la quantité nette totale, par unité de temps, d'eau qui s'infiltre par la paroi. Mais à travers la paroi la quantité nette totale qui entre tout le long du tuyau est $\int_a^b f(x)dx$. Et la différence de débit aux extrémités est $F(b) - F(a)$. L'égalité entre ces deux expressions est la formule (II.54)

II.14 Séries

Le concept de série. On appelle série en mathématiques une expression de la forme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Les nombres u_k sont appelés les termes de la série. Il y en a une infinité et ils viennent dans un certain ordre, de sorte qu'à chaque entier naturel $k = 0, 1, 2, \dots$ correspond un certain u_k .

Le lecteur et la lectrice doivent garder à l'esprit que nous n'avons pas encore parlé de la possibilité éventuelle de calculer la valeur de la série et de la façon de procéder. Le fait que dans l'expression ci-dessus les termes soient séparés par

des signes + semble suggérer qu'on doive tous les additionner. Cependant il y a une infinité de termes, et l'opération d'addition n'est définie que pour un nombre fini de termes.

Dénotons par S_n la somme des n premiers termes de notre série ; on l'appelle la *n-ième somme partielle* de la série. Nous obtenons ainsi une *suite* de nombres

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 \\ S_2 &= u_0 + u_1 \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et nous pouvons parler de la variable S_n , où $n = 0, 1, 2, \dots$. La série est dite *convergente* si, quand $n \rightarrow \infty$, la variable S_n tend vers une limite finie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Cette limite s'appelle elle-même la *somme de la série*. Dans ce cas on écrit

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Si, quand $n \rightarrow \infty$, la suite S_n ne converge pas vers une limite, on dit que la série est *divergente*. Et dans ce cas-là, on ne peut pas parler de sa somme.

Notons qu'il est possible d'adopter une définition plus large de ce qu'est une série. Alors le concept de « somme généralisée » peut être plus ou moins naturellement attribué à certaines séries divergentes. De telles séries sont dites « sommables ». Travailler avec les sommes généralisées de séries divergentes sommables est parfois utile.

Pour revenir au concept plus simple de série qui converge ou pas, observons néanmoins que si tous les termes ont le même signe, il est habituel de dire que la somme de la série, si celle-ci diverge, est égale à l'infini, avec le signe + ou - selon la direction vers laquelle elle tend.

Considérons l'exemple suivant de série

$$1 + x + x^2 + \dots$$

dont les termes sont la suite géométrique des puissances de la variable x .

La somme de ses n premiers termes est égale à

$$S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad (x \neq 1) \quad (\text{II.55})$$

Dans le cas où $|x| < 1$ ces sommes convergent vers la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - x}$$

C'est pourquoi, quand $|x| < 1$, on peut écrire

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Si $|x| > 1$, alors clairement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty$$

et la série diverge. C'est aussi le cas pour $x = 1$, ce que l'on peut voir directement sans passer par la formule (II.55), qui du reste n'a alors pas de sens. Enfin, pour $x = -1$, la suite des S_n alterne entre 1 et 0, et par conséquent la série est encore divergente³³.

À chaque *série* on peut associer la *suite* de ses sommes partielles S_1, S_2, S_3, \dots . Et la série converge, comme on l'a dit, si la suite a une limite finie. À l'inverse à n'importe quelle suite de nombres S_1, S_2, S_3, \dots , on peut associer la série correspondante

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \dots$$

33. « Divergente » dans le sens mathématique strict veut simplement dire « qui ne converge pas », même si dans le langage courant on entend plutôt par là quelque chose qui d'une manière ou d'une autre tend vers l'infini.

dont les sommes partielles sont tout simplement les termes de la suite. Ainsi la théorie des fonctions d'une variable entière (c'est-à-dire les suites) et la théorie des séries sont étroitement liées. Cependant chacune a sa portée et sa signification propres. Parfois, il est plus commode d'étudier directement la suite, d'autres fois c'est d'étudier la série correspondante qui est préférable.

Soulignons que les séries ont pendant longtemps été l'instrument de choix pour calculer et représenter diverses quantités, au premier chef des fonctions (et encore aujourd'hui les développements décimaux des nombres irrationnels). Bien sûr au cours de l'histoire le regard des mathématiciens sur le concept de nombre a évolué. Et cette évolution a eu lieu en parallèle avec le développement de l'analyse et en particulier l'idée d'infinitésimal. Une définition claire de la convergence ou de la divergence d'une série a été donnée plus haut. Elle a été élaborée au début du XIX^e siècle en même temps que le concept de limite qui lui est intimement lié.

Si une série converge, alors la suite de ses *termes* tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment, puisque ses sommes partielles convergent et que donc leur différence doit tendre vers zéro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0$$

Dans les exemples qui vont suivre, on verra que la réciproque n'est pas vraie en général. Cependant le critère ci-dessus est utile car il énonce une *condition nécessaire* pour la convergence d'une série. Par exemple, le fait que la série dont les termes forment une progression géométrique ne converge pas quand $|x| > 1$, découle déjà de ce que les termes ne tendent pas vers zéro.

Si la série est constituée de termes positifs, alors ses sommes partielles S_n sont croissantes, et il n'y a que deux possibilités : soit, quel que soit le nombre A , il existe un entier n tel que pour $k \geq n$, on a $S_k > A$, cela signifie alors que les sommes partielles tendent vers $+\infty$, et donc la série diverge ; soit il

existe un nombre A tel que, quel que soit n , la somme partielle S_n est inférieure à A , auquel cas ces sommes partielles doivent converger vers une limite finie inférieure ou égale à A , et notre série sera convergente.

Convergence des séries. La question de savoir si une série converge ou pas peut souvent être tranchée en la comparant à une autre série. Pour cela on utilise fréquemment le critère suivant.

Soit les deux séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

dont les termes sont positifs, et à partir d'une certaine valeur de l'index n on a l'inégalité

$$u_n \leq v_n$$

alors la convergence de la deuxième série implique la convergence de la première; et la divergence de la première série implique la divergence de la seconde.

Regardons par exemple la série suivante

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

appelée la *série harmonique*. Ses éléments sont, terme à terme, plus grands ou égaux à ceux de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

(les termes suivants de cette seconde série sont huit fois le terme $\frac{1}{16}$, etc.) Étant donné que les deux termes $\frac{1}{4}$ font $\frac{1}{2}$, les quatre termes $\frac{1}{8}$ font $\frac{1}{2}$, les huit termes $\frac{1}{16}$ font $\frac{1}{2}$, etc., il est clair que les sommes partielles de cette seconde série tendent vers plus l'infini. Autrement dit cette seconde série diverge. Par conséquent la série harmonique diverge aussi.

La série

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots \quad (\text{II.56})$$

où α est un nombre positif, plus petit que un, manifestement diverge, puisque pour n'importe quel entier positif n on a

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n} \quad (0 < \alpha < 1)$$

D'un autre côté, on peut montrer que la série (II.56) converge pour tout $\alpha > 1$. Nous allons le montrer ici seulement pour $\alpha \geq 2$; pour cela regardons la série

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \dots$$

dont tous les termes sont positifs. Elle converge et sa somme est égale à un, puisque ses sommes partielles sont

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

D'un autre côté, chaque terme de cette série satisfait l'inégalité

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

d'où il s'ensuit que la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

converge. De plus, la série (II.56) converge aussi $\forall \alpha > 2$.

Donnons sans démonstration un autre critère souvent utilisé de convergence ou divergence d'une série à termes positifs, appelé critère de D'Alembert³⁴.

Supposons que le ratio $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, quand n tend vers l'infini, tende vers une limite q . Alors si $q < 1$ on saura que la série converge, tandis que si $q > 1$ on saura qu'elle diverge. Pour $q = 1$ la question de sa convergence reste ouverte. (C'est-à-dire qu'elle nécessite un examen spécifique pour être tranchée. Par exemple la série harmonique diverge, mais celle des inverses des carrés converge.)

34. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), mathématicien, physicien et philosophe français.

Comme l'on sait, la somme d'un nombre fini de termes ne change pas si on réarrange l'ordre des termes. Mais cela n'est pas vrai en général pour les séries infinies. Il existe des séries convergentes pour lesquelles une réorganisation de l'ordre des termes change la valeur de leur somme, ou même les rend divergentes. Des séries dont la somme a ce caractère instable perdent une des propriétés basiques de l'addition ordinaire qui est la commutativité. C'est pourquoi il est très important de distinguer parmi les séries celles qui conservent cette propriété. On les appelle les séries absolument convergentes. La série

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

est dite *absolument convergente* si et seulement si la série formée avec les valeurs absolues de ses termes

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

est une série convergente. On peut montrer qu'une série absolument convergente converge toujours, c'est-à-dire que ses sommes partielles tendent vers une limite finie (et celle-ci ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes sont ajoutés, à condition bien sûr que n'importe quel terme u_n finisse toujours par être inclus). Toutes les séries convergentes dont tous les termes sont du même signe sont bien évidemment absolument convergentes.

La série

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$$

peut servir d'exemple de série absolument convergente, puisque la série

$$\left| \frac{\sin x}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2x}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3x}{3^2} \right| + \dots$$

est inférieure terme à terme à la série convergente

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Un exemple de série convergente, mais pas absolument convergente, est offert par la série suivante :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Essayez de le montrer vous-mêmes.

Séries de fonctions. Séries uniformément convergentes. En analyse, on a souvent affaire à des séries dont les termes sont des fonctions de la variable x . Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà rencontré des séries de ce genre. Par exemple la série $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$. Pour certaines valeurs de x elle converge, pour d'autres elle diverge. Des cas importants pour les applications sont les séries de fonctions qui convergent pour toutes les valeurs de x appartenant à un certain intervalle, qui peut même être parfois tous les réels ou toute la demi-droite positive. On a besoin de différentier ou intégrer ces séries terme à terme si c'est possible, ainsi que de clarifier la question de la continuité de leur somme, etc. Quand on regarde des additions ordinaires, c'est-à-dire d'un nombre fini de termes, il y a des règles générales simples. Nous savons que la dérivée d'une somme de fonctions différentiables est la somme de leurs dérivées, l'intégrale d'une somme de fonctions continues est la somme des intégrales, la somme de fonctions continues est encore une fonction continue – tout ça, encore une fois, quand il y a un nombre fini de termes.

Cependant quand on passe à une série infinie (c'est-à-dire si l'on peut dire à une « addition infinie »), ces règles simples cessent en général d'être vraies. On pourrait citer de nombreux exemples de séries convergentes de fonctions pour lesquelles l'intégration ou la différentiation terme à terme produisent des résultats faux. De même, quand une série est construite avec des termes qui sont tous des fonctions continues, sa somme néanmoins n'est pas nécessairement une fonction continue. D'un autre côté, il y a beaucoup de séries dont la somme, pour ce qui concerne ces règles, se comporte comme une addition finie.

Des études plus approfondies montrent qu'on peut être

assuré à l'avance qu'on pourra « en toute légalité » appliquer les règles valides dans le cas des additions finies à des séries infinies (c'est-à-dire qu'on pourra *inverser* les opérateurs « dérivée » ou « intégrale » ou « limite » avec l'opérateur « limite » qui définit la somme de la série) si les séries en question non seulement convergent pour chaque valeur de x (dans l'intervalle où la variable peut prendre ses valeurs) mais convergent uniformément sur tout l'intervalle. Ainsi, en analyse mathématique, a vu le jour le concept important de *convergence uniforme* (au milieu du XIX^e siècle).

Considérons la série

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

dont les termes sont des fonctions définies sur le segment $[a, b]$. Nous allons supposer que cette série, pour chaque valeur individuelle de la variable x sur ce segment, converge vers une certaine valeur $S(x)$. La somme des n premiers termes de cette série

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_{n-1}(x)$$

est aussi une certaine fonction de x définie sur $[a, b]$.

Introduisons maintenant la quantité η_n égale à la borne supérieure des valeurs $|S(x) - S_n(x)|$ quand x parcourt le segment $[a, b]$ (cf. chapitre XV tome 3). On dénote cette quantité comme ceci

$$\eta_n = \sup_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)|$$

Dans le cas où $|S(x) - S_n(x)|$ atteint sa valeur maximale, ce qui est certainement vrai, par exemple, quand $S(x)$ et $S_n(x)$ sont continues, alors η_n est simplement $\max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)|$.

En conséquence de l'hypothèse que notre série converge en chaque valeur individuelle donnée de x sur le segment $[a, b]$, on a pour chaque x donné

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

Cependant la quantité η_n peut elle-même tendre vers zéro ou pas. Si la quantité η_n tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ on dit que la série est *uniformément convergente*. Dans le cas contraire, on dit que la convergence de la série n'est pas uniforme. Avec le même sens, on peut parler de la convergence uniforme ou non d'une suite de fonctions $S_n(x)$, sans faire nécessairement le lien avec la série dont elles sont les sommes partielles (voir pp. 284-5).

Exemple 1. La série de fonctions

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \dots$$

que nous allons considérer seulement pour les valeurs non négatives de x , c'est-à-dire sur la demi-droite $[0, +\infty)$, peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots$$

d'où il vient que la somme partielle est

$$S_n(x) = \frac{1}{x+n}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$$

Ainsi, la série de fonctions converge pour toutes les valeurs non négatives de x et a pour chacune d'entre elles la valeur $S(x) = 0$.

En outre notre série de fonctions converge *uniformément* vers zéro sur la demi-droite $[0, +\infty)$ car

$$\eta_n = \sup_{0 \leq x < \infty} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{0 \leq x < \infty} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

La figure II.37 montre les graphes des sommes partielles $S_n(x)$.

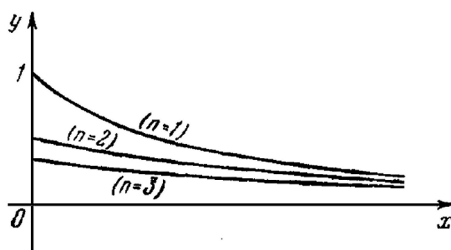


Figure II.37 : Exemple de convergence uniforme

Exemple 2. La série

$$x + x(x - 1) + x^2(x - 1) + \dots$$

peut être réécrite sous la forme

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots$$

d'où il découle que $S_n(x) = x^n$ et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

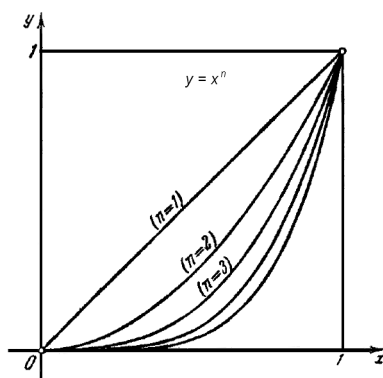


Figure II.38 : Exemple de convergence non uniforme

Ainsi, la somme de la série existe sur tout le segment fermé $[0, 1]$, mais elle est discontinue au point $x = 1$. Sur le reste du segment, fermé à gauche, ouvert à droite, elle est continue. La quantité $|S_n(x) - S(x)|$ pour chaque valeur de x sur le segment $[0, 1]$ est plus petite que 1 (en $x = 1$ en particulier, elle vaut 0); mais, quel que soit n , pour x suffisamment proche de $x = 1$ ³⁵, cette différence reste aussi proche que l'on veut de 1 aussi. En conséquence, quel que soit $n = 1, 2, \dots$, on a

$$\eta_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$$

Et donc sur tout le segment $[0, 1]$ notre série converge, mais elle ne converge pas uniformément. La figure II.38 montre les graphes des sommes partielles $S_n(x)$. Le graphe de la somme de la série est simplement le trait horizontal $y = 0$ sur le segment semi-fermé $[0, 1)$ et le point $(1, 1)$ à la borne $x = 1$.

Cet exemple montre que la somme d'une série de fonctions continues, si la série ne converge pas uniformément, peut être une fonction discontinue.

D'un autre côté, si on considère notre série sur le segment $0 \leq x \leq q$, où $q < 1$, alors

$$\eta_n = \sup_{0 \leq x \leq q} |S_n(x) - S(x)| = \max_{0 \leq x \leq q} x^n = q^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

et, par conséquent, sur ce segment la série converge uniformément. Par ailleurs sa somme, comme nous l'avons vu, est continue (c'est le trait horizontal $y = 0$ de $x = 0$ à $x = q$).

C'est vrai d'une manière générale, et on peut le montrer rigoureusement : *la somme d'une série de fonctions continues, si la convergence est uniforme, est encore une fonction continue.*

35. Ce qui fait que la convergence *n'est pas uniforme*, c'est que plus x est proche de 1, plus il faut aller loin en n pour que la différence $|S_n(x) - S(x)|$ soit plus petite qu'un nombre arbitraire ϵ qu'on s'est donné. En d'autres termes le n dépend de x . Noter par ailleurs que ce que font les fonctions $S_n(x)$ et $S(x)$ au point précis $x = 1$ n'a pas d'incidence sur le raisonnement. Simplement on a un exemple d'une série de fonctions $u_n(x) = x^n(x - 1)$ qui sont toutes continues sur l'ensemble du segment fermé $[0, 1]$, mais pas leur somme.

Exemple 3. On considère la série dont la somme $S_n(x)$ ³⁶ des n premiers termes a la forme montrée sur la figure II.39.

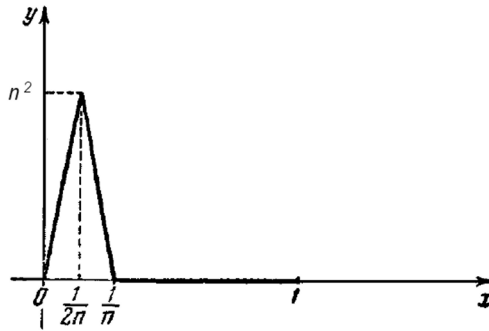


Figure II.39 : Étude d'une collection de pics de plus en plus minces et hauts.

On voit clairement que, quel que soit n , $S_n(0) = 0$. Et pour $0 < x \leq 1$, dès que $n \geq \frac{1}{x}$ on a aussi $S_n(x) = 0$. Par conséquent, quel que soit x dans le segment fermé $[0, 1]$ on a

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0$$

D'un autre côté

$$\eta_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = \sup |S_n(x)| = n^2$$

Nous voyons que la grandeur η_n ne tend pas zéro; elle tend même vers l'infini. Noter que la série qui correspond à la suite des $S_n(x)$ considérée ne peut pas être intégrée terme à terme sur l'intervalle $[0, 1]$, puisque

$$\int_0^1 S(x) dx = 0, \quad \text{tandis que} \quad \int_0^1 S_n(x) dx = \frac{1}{2} n^2 \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

36. On a vu plus haut, p. 285, que les suites et les séries sont deux façons différentes de regarder un même processus à la limite. Ici on prend le point de vue de la suite.

et par conséquent, si on reconstruit les termes de la série à l'aide des sommes partielles, et on intègre terme à terme sur le segment $[0, 1]$ on obtient

$$\int_0^1 S_1(x)dx + \int_0^1 [S_2(x) - S_1(x)] dx + \int_0^1 [S_3(x) - S_2(x)] dx + \dots$$

ce qui se ramène à la série numérique divergente suivante

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\right) + \dots$$

En résumé, sur $[0, 1]$, la somme de la série est partout 0 et donc son intégrale sur ce segment aussi. Mais l'intégration terme à terme donne $+\infty$. Ce qui montre qu'on ne peut pas toujours intégrer une série de fonctions, même sur un intervalle où elle est partout convergente, terme à terme.

Énonçons sans les démontrer les principales propriétés des séries uniformément convergentes :

1. La somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur le segment $[a, b]$ est encore une fonction continue sur ce segment.

2. Si une série de fonctions continues

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots \quad (\text{II.57})$$

converge uniformément sur le segment $[a, b]$, alors elle peut être intégrée terme à terme, c'est-à-dire, quelle que soit la paire de points x_1 et x_2 dans $[a, b]$, on a l'identité

$$\int_{x_1}^{x_2} S(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} u_0(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} u_1(t)dt + \dots$$

On le retient parfois sous la forme suivante

$$\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \right] dt = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\int_a^b u_i(t)dt \right]$$

Autrement dit, pour une série uniformément convergente, on peut inverser les deux signes somme (l'un représentant l'intégrale de a à b , et l'autre une somme infinie discrète).

3. Supposons que sur le segment $[a, b]$ la série (II.57) converge et les termes $u_k(x)$ aient tous une dérivée continue, alors l'identité

$$S'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \dots \quad (\text{II.58})$$

obtenue du côté gauche en différentiant $S(x)$ et du côté droit en différentiant terme et terme la somme qui compose $S(x)$, c'est-à-dire le membre de droite de (II.57), sera vérifiée pour toutes les valeurs de x sur le segment $[a, b]$, à la condition que la série des dérivées, du côté droit de (II.58), converge uniformément.

Séries entières³⁷. Dans la section II.9 nous avons appelé la fonction $f(x)$, définie sur le segment $[a, b]$, *analytique*, si sur ce segment elle possédait des dérivées de tous les ordres et si dans un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque x_0 appartenant au segment $[a, b]$ la fonction pouvait être représentée par une série de Taylor convergeant vers elle

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (\text{II.59})$$

Si nous introduisons la notation

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

alors cette série peut se réécrire

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (\text{II.60})$$

Toute série ayant cette forme, où les nombres a_0, a_1, a_2, \dots sont des paramètres ne dépendant pas de x , est appelée en mathématiques une *série entière*. Les nombres a_i sont appelés les coefficients de la série entière.

Regardons par exemple la série entière

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (\text{II.61})$$

37. Appelées dans la plupart des langues « séries de puissances ».

dont les termes forment une progression géométrique. Autrement dit c'est la série (II.60) où tous les a_i valent 1 et $x_0 = 0$.

Nous savons que pour tout x dans l'intervalle $-1 < x < 1$ cette série est convergente et sa somme est égale à

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

Pour les autres valeurs de x la série est divergente.

Expliquons ce que nous allons faire : nous sommes partis d'une série entière (II.61), et sommes arrivés à la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$ qui est sa somme sur le segment où elle converge. Maintenant nous allons étudier la *série de Taylor* (II.59) de cette fonction $S(x)$ autour du point $x_0 = 0$. Et nous allons montrer qu'elle coïncide avec la série entière initiale (II.61).

Il est facile de voir que la différence entre la somme de la série (II.61) et la somme de ses n premiers termes est

$$S(x) - S_n(x) = \frac{x^n}{1-x} \quad (\text{II.62})$$

et si $-q \leq x \leq q$, où q est un nombre positif plus petit que 1, alors

$$\eta_n = \max |S(x) - S_n(x)| = \frac{q^n}{1-q}$$

Il en découle visiblement que η_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini, et notre série entière initiale est donc uniformément convergente sur le segment $-q \leq x \leq q$ quel que soit le nombre positif $q < 1$.

Il est facile de vérifier que la fonction

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

a des dérivées de tous les ordres. Sa dérivée d'ordre n est

$$S^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

d'où

$$S^{(n)}(0) = n!$$

et par conséquent la somme des n premiers termes dans le développement de Taylor (II.59) de la fonction $S(x)$ au point $x_0 = 0$ coïncide avec la somme des n premiers termes de la série (II.61). En outre, nous savons que le terme résiduel (II.62) tend vers zéro quand n tend vers l'infini pour tous les x dans le segment $-1 < x < 1$. Cela démontre que la série entière initiale (II.61) est aussi la série de Taylor au point $x_0 = 0$ de sa somme $S(x)$.

Observons encore un autre fait. Au lieu d'examiner ce qui se passe au point 0, choisissons maintenant dans l'intervalle de convergence $-1 < x < 1$ de notre série entière (II.61) un point arbitraire x_0 . Il est facile de voir que pour tous les x suffisamment proches de x_0 , plus précisément pour ceux satisfaisant l'inégalité

$$\frac{|x - x_0|}{1 - x_0} < 1$$

on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{x-x_0}{1-x_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{1-x_0} \left[1 + \frac{x-x_0}{1-x_0} + \left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{1-x_0} + \frac{x-x_0}{(1-x_0)^2} + \frac{(x-x_0)^2}{(1-x_0)^3} + \dots \quad (\text{II.63}) \end{aligned}$$

La lectrice et le lecteur peuvent vérifier sans difficulté que

$$\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$$

Par conséquent, la série (II.63) est encore le développement de Taylor de sa somme $S(x)$ ³⁸. Mais on a regardé cette fois-ci

38. Une fonction $f(x)$ n'a pas *une* série de Taylor, mais autant de séries de Taylor qu'il y a de points x_0 autour desquels on peut représenter $f(x)$ sous la forme (II.59). « Développement de Taylor » et « série de Taylor » sont deux termes synonymes.

le développement de Taylor non plus autour de 0, mais autour d'un point x_0 quelconque dans le domaine de convergence de (II.61). En résumé, on a établi que, pour x dans un voisinage suffisamment étroit autour d'un point arbitraire x_0 appartenant au domaine de convergence de la série (II.61), la série (II.63) converge vers $S(x)$. Et, donc, puisque le point x_0 est arbitraire, cela veut dire que la fonction $S(x)$ est une fonction analytique sur tout son intervalle de convergence $-1 < x < 1$.

Tous ces résultats que nous avons établis pour une série entière particulière – la série géométrique (II.61) – sont vrais pour n'importe quelle série entière (plus sur le sujet dans le chapitre IX, tome 2). Plus précisément, associé à n'importe quelle série de la forme (II.60), où les a_i sont des coefficients arbitraires (constants), fonction par définition de la variable discrète i selon une certaine loi, il existe un nombre non négatif R (qui peut même dans certains cas être $+\infty$), appelé le *rayon de convergence de la série* (II.60), qui satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $(x_0 - R) < x < (x_0 + R)$, qui s'appelle l'intervalle de convergence de la série, elle converge et sa somme $S(x)$ est une fonction analytique de x sur l'intervalle. De plus, la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b]$ entièrement inclus dans l'intervalle de convergence. Enfin, la série elle-même est la série de Taylor de sa somme.

2. Aux bornes de l'intervalle de convergence, la série peut converger ou non ; cela dépend de propriétés spécifiques de la suite des coefficients a_i . Mais elle diverge certainement en dehors de l'intervalle fermé $(x_0 - R) \leq x \leq (x_0 + R)$.

Nous invitons la lectrice et le lecteur à examiner les séries entières

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

et s'assurer que la première a un rayon de convergence infini, la seconde a un rayon de convergence égal à zéro, et la troisième a le rayon de convergence $R = 1$.

D'après la définition donnée précédemment, toute fonction analytique, autour de n'importe quel point dans son domaine de définition, si l'on prend un voisinage suffisamment petit autour de ce point, peut être développée en une série entière convergente dont elle est la somme. À l'inverse, il découle de tout ce qui a été dit que toute série entière dont le rayon de convergence n'est pas nul a pour somme, là où elle converge, une fonction analytique.

Nous voyons ainsi que les séries entières et les fonctions analytiques ont un lien organique. On peut même dire que les séries entières, sur leur intervalle de convergence, sont des outils très naturels pour représenter les fonctions analytiques, et aussi pour les approximer par des polynômes algébriques. (Pour les approximations en dehors du rayon de convergence des séries entières, d'autres méthodes sont employées, voir chapitre XII, tome 2.)

Par exemple, du fait que la fonction $\frac{1}{1-x}$ peut être représentée par la série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

convergente sur l'intervalle $-1 < x < 1$, il s'ensuit que la série converge uniformément sur n'importe quel segment $-a \leq x \leq a$, quand $a < 1$. Cela implique qu'il est possible d'approximer la fonction avec la précision qu'on veut – précision portant sur tout l'intervalle $[-a, a]$ – en utilisant la somme partielle de rang approprié.

Mettons que nous voulions approximer la fonction $\frac{1}{1-x}$ à l'aide d'un polynôme sur le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec une précision de 0,01. Observons que pour tout x dans ce segment on a les relations suivantes :

$$\left| \frac{1}{1-x} - 1 - x - \dots - x^n \right| = \left| x^{n+1} + x^{n+2} + \dots \right| \leq$$

$$\leq |x^{n+1}| + |x^{n+2}| + \dots \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots = \frac{1}{2^n}$$

et puisque $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$ le polynôme recherché approximant la fonction que nous considérons sur tout le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ avec une précision de 0,01 aura la forme

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

Notons une dernière propriété très utile des séries entières : elles peuvent toujours être différenciées terme à terme dans l'intervalle de convergence. On l'emploie souvent dans une grande variété de problèmes en mathématiques.

Supposons par exemple que nous devons trouver la solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition supplémentaire $y(0) = 1$. Nous allons chercher sa solution sous la forme d'une série entière

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

La condition additionnelle donne tout de suite $a_0 = 1$. Si nous faisons l'hypothèse que cette série converge³⁹, nous avons le droit de la différencier terme à terme ; nous obtenons

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

En substituant ces deux séries au lieu de y et y' dans l'équation différentielle, et en utilisant le fait que deux séries entières dont les sommes sont les mêmes fonctions doivent avoir les mêmes coefficients, nous obtenons

$$a_k = \frac{1}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

et donc la solution a la forme

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

39. Autrement dit, d'un point de vue logique, nous cherchons une solution dans l'ensemble des fonctions représentables sous la forme d'une série entière avec un rayon de convergence R non nul. Et nous allons en trouver une.

On sait que cette série converge pour toutes les valeurs de x et que sa somme est $y = e^x$.

Dans le cas que nous venons d'étudier, il se trouve que la somme de la série est une fonction élémentaire que nous connaissions déjà. Cependant, ce ne sera pas toujours le cas : il peut arriver que la solution que nous trouverons en résolvant notre problème soit une série entière convergente dont la somme n'est pas une fonction élémentaire. C'est par exemple le cas de la série

$$y_p(x) = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2.4(2p+2)(2p+4)} - \dots \right]$$

obtenue comme solution de l'équation différentielle de Bessel⁴⁰ qui a des applications importantes. Ainsi les séries entières sont aussi un moyen d'étudier de nouvelles fonctions.

Suggestions de lecture

APPELL Paul et VALIRON Georges, *Analyse mathématique*, Gauthier-Villars, 1937

DESCHAMPS Claude, MOULIN François, et al., *Maths MPSI – Tout-en-un*, Dunod, 2018

LYCEES LOUIS-LE-GRAND & HENRI-IV (préparé par Nicolas Tosel), *Mathématiques : du lycée aux CPGE scientifiques*
https://lapasserelle.com/documents/exos_terminale.pdf

ROTA Gian-Carlo, *Indiscrete Thoughts*, Birkhauser Boston, 1996

SMIRNOV Vladimir, *Cours de mathématiques supérieures*, Éditions de Moscou, 1969-84

STILLWELL John, *Mathematics and its history*, Springer-Verlag, 2004

40. Friedrich Bessel (1784-1846), mathématicien et astronome allemand.

TABLE DES MATIÈRES

du volume 1

Préface des auteurs	i
Avant-propos du traducteur	v
Chapitre I : Vue d'ensemble des mathématiques	1
I.1 Caractéristiques des mathématiques	2
I.2 Arithmétique	11
I.3 Géométrie	30
I.4 Arithmétique et géométrie	37
I.5 L'âge des mathématiques élémentaires	56
I.6 Mathématiques des quantités variables	69
I.7 Mathématiques contemporaines	90
I.8 L'essence des mathématiques	103
I.9 Schéma de développement des mathématiques	118
Suggestions de lecture	132
Chapitre II : Analyse	133
II.1 Introduction	134
II.2 Fonction	145
II.3 Limite	157
II.4 Fonctions continues	169
II.5 Dérivée	175
II.6 Règles de différentiation	188
II.7 Maximums et minimums. Exploration du graphe d'une fonction	197
II.8 Accroissement et différentielle d'une fonction	210
II.9 Formule de Taylor	220
II.10 Intégrale	228
II.11 Intégrales indéfinies. Techniques d'intégration	241
II.12 Fonctions à plusieurs variables	247
II.13 Généralisation du concept d'intégrale	270
II.14 Séries	283
Suggestions de lecture	303

Chapitre III : Géométrie analytique	305
III.1 Introduction	306
III.2 Les deux grandes idées de Descartes	308
III.3 Problèmes les plus simples	312
III.4 Étude des courbes représentant des équations du 1 ^{er} et du 2 nd degré	314
III.5 Méthode de Descartes pour résoudre les équations algébriques du 3 ^e et du 4 ^e degré	318
III.6 Théorie générale des diamètres de Newton	322
III.7 Ellipse, hyperbole et parabole	325
III.8 Réduction de l'équation générale du 2 nd degré à sa forme canonique	344
III.9 Représentation des forces, vitesses et accélérations par des triplets de nombres. Théorie des vecteurs	353
III.10 Géométrie analytique dans l'espace. Équation d'une surface dans l'espace et équations d'une courbe	363
III.11 Transformations orthogonales et affines	375
III.12 Théorie des invariants	394
III.13 Géométrie projective	400
III.14 Transformations de Lorentz	412
Conclusions	426
Suggestions de lecture	430
 Chapitre IV : Théorie des équations algébriques	 431
IV.1 Introduction	431
IV.2 Résolution algébrique des équations	439
IV.3 Théorème fondamental de l'algèbre	464
IV.4 Étude de la répartition des racines d'un polynôme dans le plan complexe	484
IV.5 Approximation numérique des racines	501
Suggestions de lecture	511
 Index des noms	 513
Table des matières du volume 1	519
Table des matières générale	521

TABLE DES MATIÈRES

GÉNÉRALE

VOLUME 1

	Préface
	Avant-propos
I	Vue d'ensemble des mathématiques
II	Analyse
III	Géométrie analytique
IV	Théorie des équations algébriques
	Index des noms

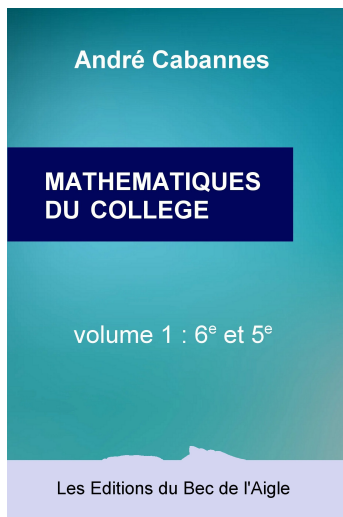
VOLUME 2

V	Équations différentielles ordinaires
VI	Équations aux dérivées partielles
VII	Courbes et surfaces
VIII	Calcul des variations
IX	<u>Fonctions d'une variable complexe</u>
X	Nombres premiers
XI	Théorie des probabilités
XII	Approximation des fonctions
XIII	Méthodes numériques
XIV	Informatique
	Index des noms

VOLUME 3

XV	<u>Théorie des fonctions d'une variable réelle</u>
XVI	Algèbre linéaire
XVII	Espaces abstraits
XVIII	Topologie
XIX	Analyse fonctionnelle
XX	Groupes et autres structures algébriques
	Index des noms

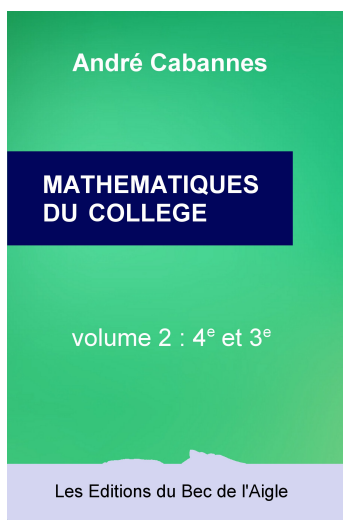
Catalogue des
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159
Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

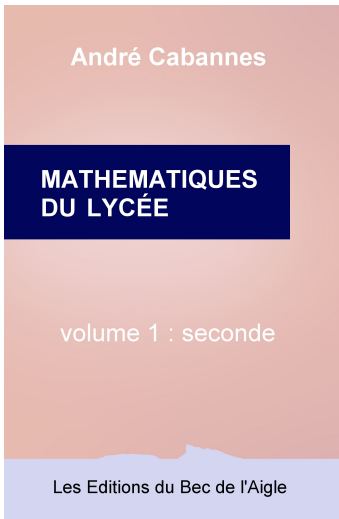
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167
Cours de mathématiques du collège.

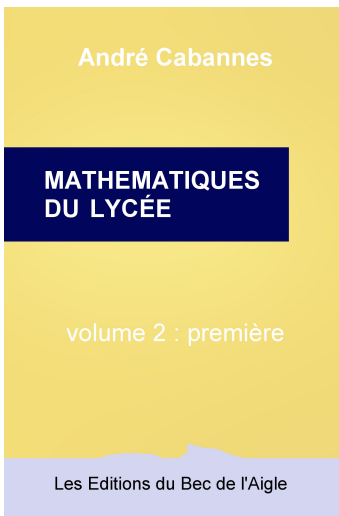
Volume 2 : 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



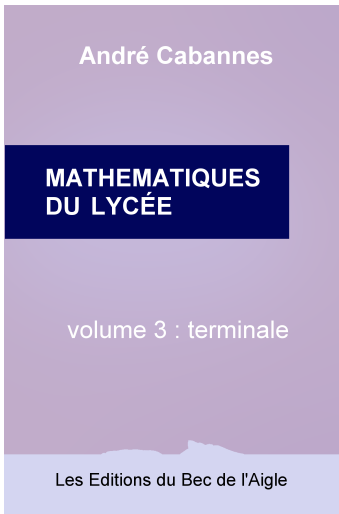
www.amazon.fr/dp/2957239183
Cours de mathématiques de se-
conde

à l'intention des lycéens et de
leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191
Cours de mathématiques de pre-
mière

à l'intention des lycéens et de
leurs parents

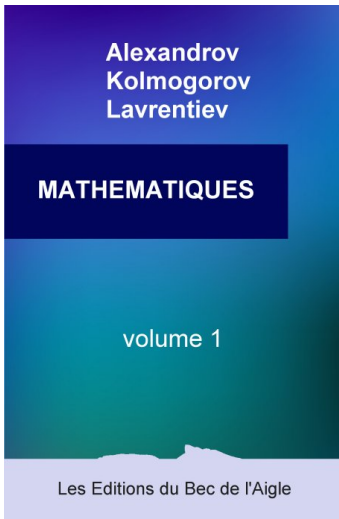


www.amazon.fr/dp/2958738507
Cours de mathématiques de terminale

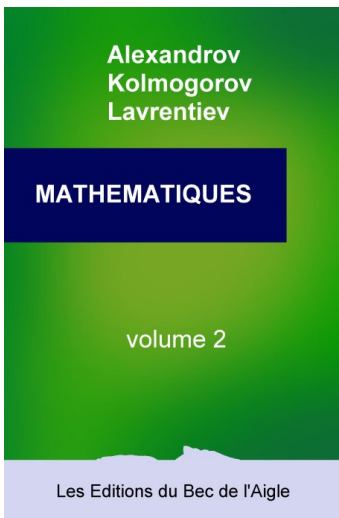
à l'intention des lycéens et de leurs parents



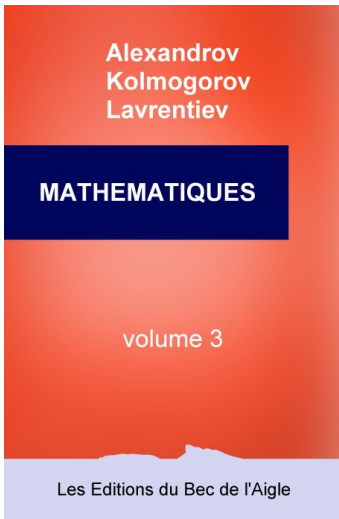
www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



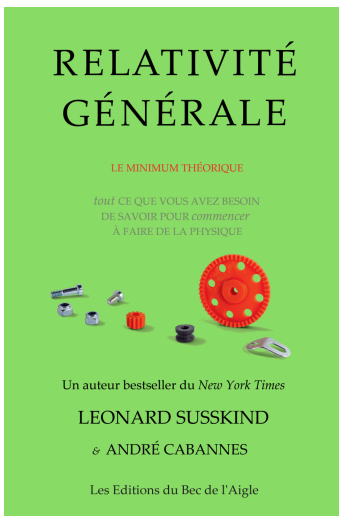
www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques
(niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur
(niveau première année
d'université)

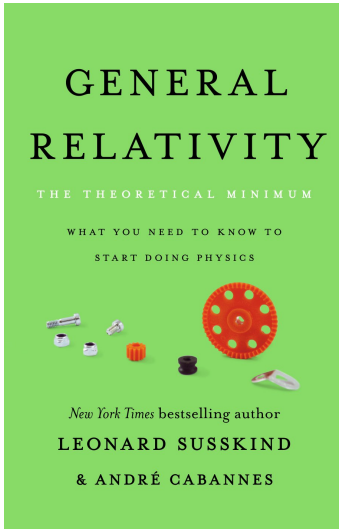


www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



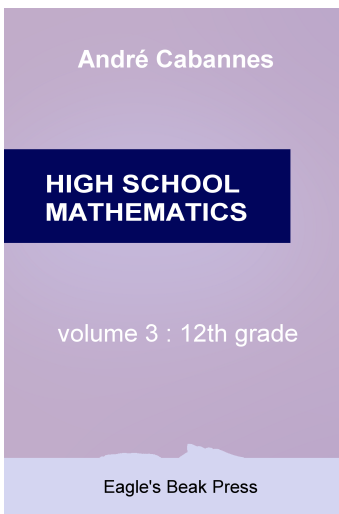
www.amazon.fr/dp/2957239175
Cours de physique (niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



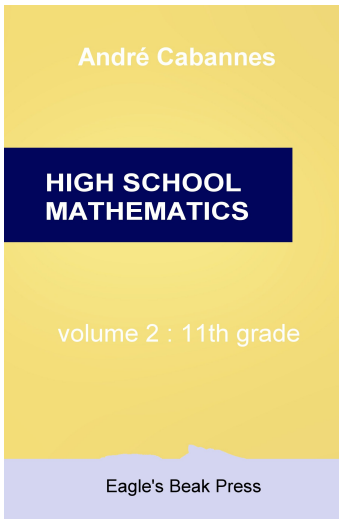
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



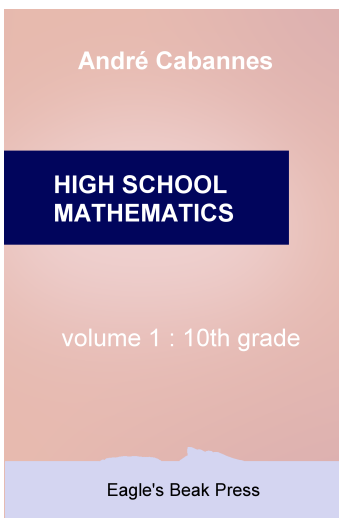
www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

Volume 3 : 12th grade



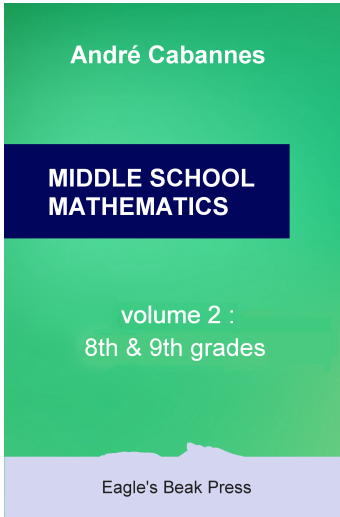
www.amazon.com/dp/2958738523
High school mathematics

Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531
High school mathematics

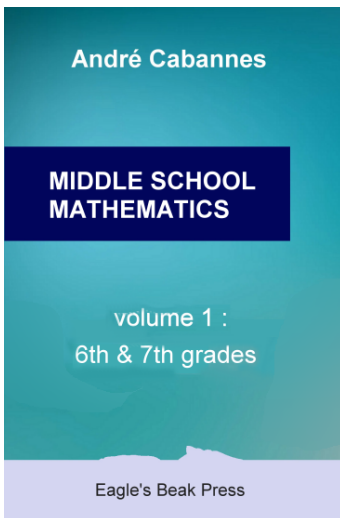
Volume 1 : 10th grade



www.amazon.com/dp/295873854X
Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

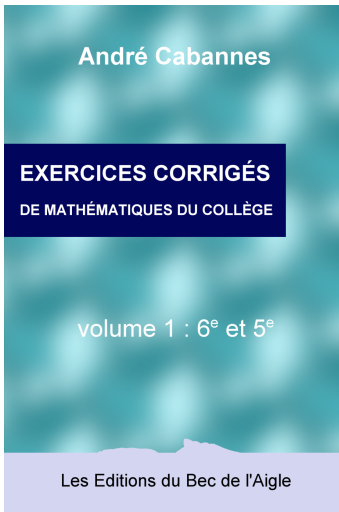
for middle school students and
their parents



www.amazon.com/dp/2958738558
Middle school mathematics

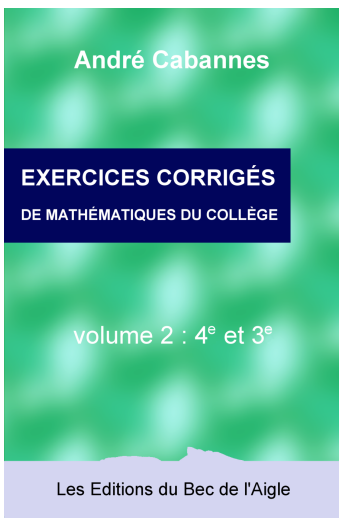
Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and
their parents



www.amazon.fr/dp/2958738566
Maths du collège volume 1

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574
Maths du collège volume 2

Le livre de CORRIGÉS
des exercices