Partie II : Classe de Troisième

Contenu :

- II.1 Jeu de Tic Tac Toe et espace multidimensionnel
- II.2 Arithmétique : diviseurs, PGCD et algorithme d'Euclide
- II.3 Théorème de Bézout
- II.4 Théorème fondamental de l'arithmétique
- II.5 Système décimal et système binaire
- II.6 Inéquations et inégalités
- II.7 Mettre un problème réel en équation
- II.8 Développements algébriques
- II.9 Factorisation du trinôme
- II.10 Racines de polynômes, théorème de Descartes
- II.11 Histoire de l'équation trinôme
- II.12 Les fonctions
- II.13 Fonctions linéaires et affines : représentation graphique
- II.14 Pratique avec les droites
- II.15 Fonctions et équations : récapitulation
- II.16 Applications des fonctions et systèmes linéaires
- II.17 Fonctions, équations et systèmes plus généraux
- II.18 Résolution d'un problème par la géométrie analytique
- II.19 Collection de droites paramétrée
- II.20 Courbes (1) : fonctions, équations et dessins
- II.21 Courbes (2) : courbes paramétrées
- II.22 Théorème de Thalès et sa réciproque
- II.23 Trigonométrie : calculer des angles et des longueurs
- II.24 Volume et surface de la sphère
- II.25 Polygones et polyèdres réguliers

II.26 Probabilités (1) : expérience aléatoire, probabilité d'un évènement
II.27 Probabilités (2) : variable aléatoire, notion d'indépendance, roue de la Fortune
II.28 Statistiques descriptives et inférentielles

II.18 Résolution d'un problème par la géométrie analytique

Nous allons étudier un problème de géométrie, difficile à résoudre par la géométrie pure, mais facile par la géométrie analytique. Soit un triangle équilatéral ABC, et les trois droites AD, BE et CF qui coupent les côtés opposés au tiers :

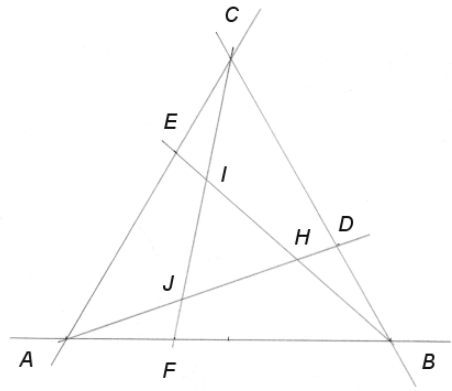


Figure II.18.1 : Triangle équilatéral ABC et points D, E, F, aux tiers sur les côtés opposés.

Les intersections des trois droites AD, BE et CF sont nommées H, I et J.

Théorème : le triangle HIJ a pour surface 1/7 de celle de ABC.

Nous allons démontrer ce résultat pour un triangle équilatéral ABC par la géométrie analytique, c'est-à-dire par l'étude des coordonnées algébriques des différents points de la figure dans un repère. Puis nous généraliserons à un triangle ABC quelconque – car ce résultat est vrai en réalité pour un triangle ABC quelconque – en appliquant nos résultats sur la compression et sur la transformation oblique d'un triangle (exemple 5 page 355, et exercice II.16.7 page 357).

Imaginons un repère dans le plan, dont l'origine est le point A, et l'axe des x est la droite AB. Prenons, sans perdre de généralité, la longueur AB comme étant l'unité.

Coordonnées de A, B, C : les coordonnées des points A, B et C sont :

- $A = (0\,;\ 0)$
- $B = (1\,;\ 0)$
- $C = (1/2\,;\ \sqrt{3}/2)$

Pour les lecteurs ou les lectrices qui ne se rappelleraient plus la hauteur d'un triangle équilatéral, soit h cette hauteur, alors par Pythagore appliqué au triangle rectangle obtenu en coupant le triangle équilatéral verticalement en son milieu, on a $h^2 + (1/2)^2 = 1^2$.

$$\rightarrow \quad h^2 = 3/4$$

$$\rightarrow \quad h = \sqrt{3}/2$$

Coordonnées de D, E, F : Tournons-nous maintenant vers les coordonnées des points D, E et F.

Coordonnées de $F = (1/3\,;\ 0)$

Coordonnées de D : en abscisse, par Thalès, D a reculé de $1/3$ par rapport à la moitié de BA, donc abscisse $= 5/6$. Et en ordonnée, toujours par Thalès, D est à un tiers de celle de C, donc ordonnée $= \sqrt{3}/6$

$D = (5/6\,;\ \sqrt{3}/6)$

De même $E = (1/3\,;\ 2/3 \times \sqrt{3}/2) = (1/3\,;\ 1/\sqrt{3})$

Coordonnées de H, I, J :

Pour calculer les coordonnées de H, on va utiliser ce qu'on a appris dans la leçon précédente sur les droites en géométrie analytique. On va calculer :

- les équations des droites AD et BE, puis
- les coordonnées de leur intersection

Droite AD : Elle passe par l'origine, donc son équation est de la forme $y = ax$. Et elle passe par $D = (5/6\,;\sqrt{3}/6)$, donc ça nous donne une contrainte sur le coefficient directeur a.

$\sqrt{3}/6 = a \times 5/6$. D'où $a = \sqrt{3}/5$ et l'équation de AD est $y = (\sqrt{3}/5) \times x$.

Droite BE : Son équation est de la forme $y = cx + d$. Comme elle passe par B, on a $0 = c + d$. Et comme elle passe par E, on a $1/\sqrt{3} = c/3 + d$.

D'où $1/\sqrt{3} = -(2/3)c$

$\rightarrow c = -\sqrt{3}/2$ et $d = \sqrt{3}/2$

Coordonnées du point H : Il est sur les deux droites

$$\begin{cases} AD : & y = \frac{\sqrt{3}}{5}x & (1) \\ BE : & y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

C'est un système de deux équations linéaires à deux inconnues. On le résout comme on a appris : on remplace, dans (2), y par sa valeur exprimée à l'aide de x, donnée par (1).

Exercice II.18.1 : Montrer que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{7}\,;\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$

Maintenant on se tourne vers la droite CF et les points I et J.

Droite CF : On a les coordonnées des points C et F

- $C = (1/2\,;\ \sqrt{3}/2)$
- $F = (1/3\,;\ 0)$

Sans rentrer dans les calculs du même type que plus haut, on obtient l'équation de la droite CF : $\quad y = (3\sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

On peut d'ailleurs vérifier que les deux points C et F sont sur cette droite et que c'est donc forcément la bonne équation. Si $x = 1/3$, alors $y = 0$, donc F est dessus. Et si $x = 1/2$, alors $y = \sqrt{3}/2$, donc C est dessus.

Coordonnées du point J : Il est à l'intersection de AD et CF. On obtient le système d'équations linéaires à deux inconnues

$$\begin{cases} AD : & y = \frac{\sqrt{3}}{5}x & (1) \\ CF : & y = (3\sqrt{3})x - \sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Exercice II.18.2 : Montrer que les coordonnées de J sont $\left(\frac{5}{14}\,;\ \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$

Coordonnées du point I : C'est l'intersection de BE et CF, donc ses coordonnées sont les solutions du système

$$\begin{cases} BE : & y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ CF : & y = (3\sqrt{3})x - \sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Exercice II.18.3 : Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{3}{7}\,;\ \frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$

Récapitulation des coordonnées de H, I et J :

- $H = \left(\frac{5}{7}\,;\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$
- $I = \left(\frac{3}{7}\,;\ \frac{2\sqrt{3}}{7}\right)$
- $J = \left(\frac{5}{14}\,;\ \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$

Calcul de la distance HI : D'une manière générale, à l'aide de la géométrie analytique, la distance entre deux points quelconques H et I, de coordonnées $(x_1\,;\ y_1)$ et $(x_2\,;\ y_2)$, est calculée en utilisant le théorème de Pythagore.

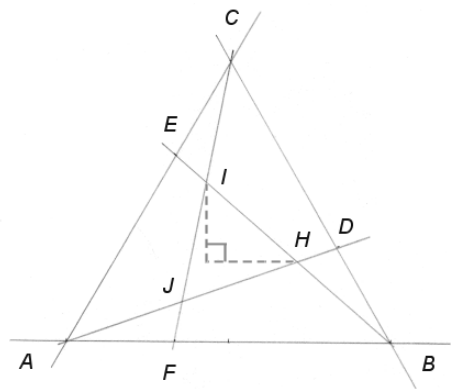


Figure II.18.2 : Calcul de la distance HI par le théorème de Pythagore.

On obtient

$$(\text{distance } HI)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Exercice II.18.4 : Montrer que $HI = 1/\sqrt{7}$.

Comme toute la figure est invariante par rotation de 120° autour du centre, c'est vrai aussi des distances IJ, et JH.

Donc le petit triangle HIJ est équilatéral, et il est obtenu en multipliant toutes les dimensions du triangle ABC par $1/\sqrt{7}$.

Donc sa surface est dans le carré de ce rapport, c'est-à-dire

$$\text{surface de } HIJ = 1/7 \times \text{surface de } ABC$$

C.Q.F.D.

Triangle quelconque : Pour terminer on a vu qu'une compression ou une transformation oblique ne changent pas les rapports de surface. Étant donné qu'un triangle quelconque peut être obtenu à partir d'un triangle équilatéral par compression et transformation oblique, le théorème reste vrai pour n'importe quel triangle.

Exercice II.18.5 : Sur une feuille de papier millimétré, dessiner un triangle ABC quelconque. Tracer les points D, E, F, puis H, I, J.

Repérer soigneusement les coordonnées de H, I et J.

Utiliser un logiciel quelconque de calcul de l'aire d'un triangle, comme on en trouve sur le Net, pour vérifier que l'aire de HIJ = aire de ABC divisée par 7.

Exercice II.18.6 : Niveau Terminale : démontrer le théorème en utilisant des coordonnées barycentriques.

Exercice II.18.7 : Soit le triangle ABC dont les sommets ont les coordonnées $A = (0,\ 0)$, $B = (24,\ 0)$, $C = (18,\ 12)$.

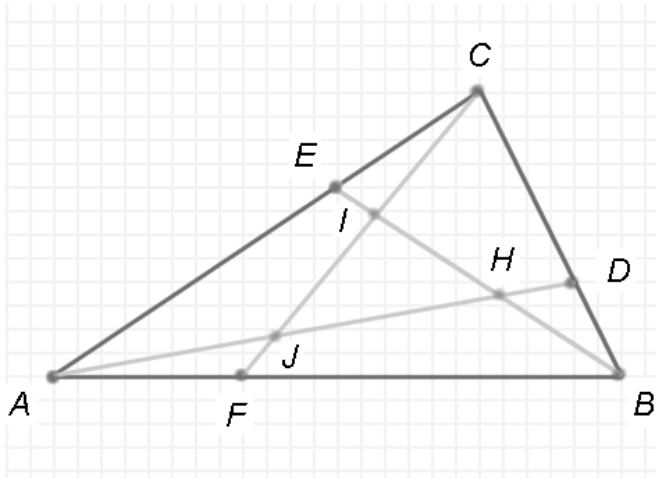


Figure II.18.3 : Triangle ABC et les points D, E, F au tiers de chaque côté.

Le triangle ABC est-il rectangle en C ?

Aide : Dans un triangle rectangle en C, la hauteur issue de C et coupant AB en K (pas montré sur la figure) est telle que $CK^2 = AK \times KB$.

Quelle est la surface de ABC ?

Quelles sont les coordonnées de D, E et F ?

Les points H, I, I sont les intersections des segments montrés sur la figure. Quelles sont les coordonnées de H, I et J ?

Utiliser un calculateur de triangle en ligne pour vérifier que la surface de HIJ est un septième de la surface de ABC.

Exercice II.18.8 : Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité.

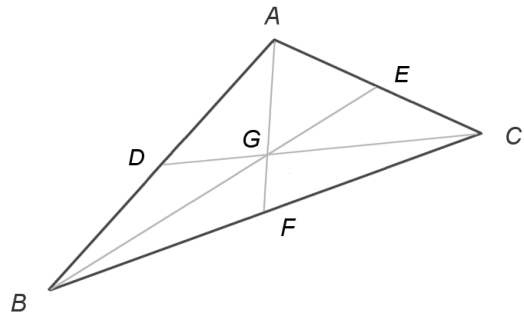


Figure II.18.4 : Triangle ABC quelconque et son centre de gravité G, c'est-à-dire l'intersection des médianes.

Montrer que les trois triangles BGC, BGA et AGC ont la même surface.

Montrer que les six triangles ADG, BDG, BGF, FGC, CGE et EGA ont la même surface.

II.19 Collection de droites paramétrée

II.19.1 Introduction

Le but de cette « leçon-exercice » est de continuer à développer notre compréhension et notre maîtrise des droites, c'est-à-dire des relations linéaires. Nous apprendrons aussi le concept de paramètre, et de famille d'objets paramétrée.

Une équation de droite, dans sa forme générale, est

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{(II.19.1)}$$

La droite « définie par cette équation » est l'ensemble des points $(x,\ y)$ dans le plan, tels que $ax + by + c = 0$.

Par exemple, le lieu des points $(x,\ y)$ satisfaisant l'équation $2x - 3y + 5 = 0$ est dessiné ci-dessous. C'est une droite. Pour la tracer, on se rappelle qu'il suffit de trouver deux points faciles (par exemple $x = 5 \ \rightarrow \ y = 5$, et $y = 0 \ \rightarrow \ x = -5/2$), et on a notre droite

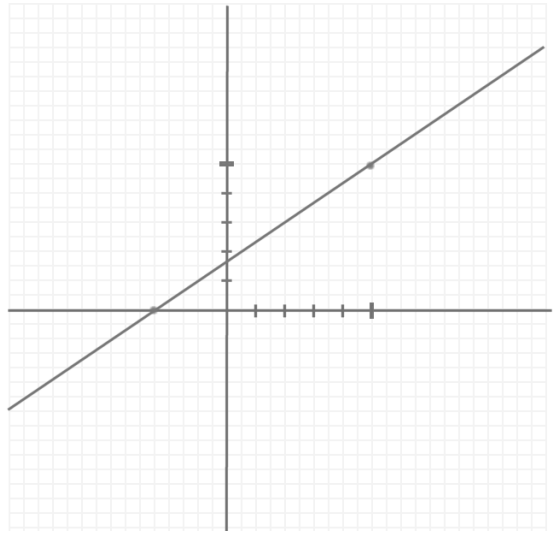


Figure II.19.1 : Droite d'équation $2x - 3y + 5 = 0$.

II.19.2 Paramétrage

Supposons, maintenant, que les coefficients a, b et c soient de la forme

- $a = 2 + 2t$
- $b = -3 + t$
- $c = 5 - t$

où t est un *paramètre* (c'est-à-dire un nombre) quelconque.

Alors les coefficients a, b et c sont des fonctions de t. En faisant varier t, on obtient toute une collection de droites. La droite de la figure II.19.1 correspond à $t = 0$.

On parle d'une collection ou famille paramétrée $\mathcal{D}$ de droites, où chaque droite D_t a l'équation

$$a(t)\,x + b(t)\,y + c(t) = 0 \qquad \text{(II.19.2)}$$

avec

- $a(t) = 2 + 2t$
- $b(t) = -3 + t$
- $c(t) = 5 - t$

Traçons une autre droite de la famille $\mathcal{D}$. Prenons $t = 1$. L'équation de D_1 est $4x - 2y + 4 = 0$. Les points suivants sont dessus :

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 2$$
$$x = 2 \;\rightarrow\; y = 6$$
$$x = -2 \;\rightarrow\; y = -2$$

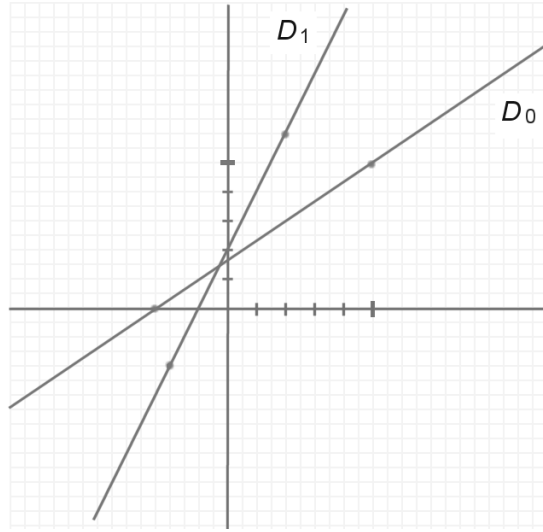


Figure II.19.2 : Droites D_0 et D_1.

II.19.3 Point d'intersection de D_0 et D_1

Appelons I le point d'intersection de D_0 et D_1. On sait trouver ses coordonnées (x, y) en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 & (t = 0) \\ 4x - 2y + 4 = 0 & (t = 1) \end{cases}$$

Résolution : multiplions la 1ère équation par -2

$$\rightarrow \; -4x + 6y - 10 = 0$$

Et additionnons la 2ème équation afin d'éliminer le terme en x, et obtenir y

$$\rightarrow \; 4y - 6 = 0$$

D'où $y = 3/2$. Puis on trouve $x = -1/4$. C'est-à-dire, le point d'intersection I a les coordonnées $(-1/4\,;\; 3/2)$.

II.19.4 Étude d'une troisième droite de la collection paramétrée

Regardons encore une troisième droite de la famille $\mathcal{D}$. Prenons $t = 2$. L'équation de D_2 est $6x - y + 3 = 0$. On trouve quelques points dessus, afin de la dessiner :

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 3$$
$$y = 0 \;\rightarrow\; x = -1/2$$
$$x = 1/2 \;\rightarrow\; y = 6$$
$$x = -1 \;\rightarrow\; y = -3$$

Tiens, tiens, sur la figure II.19.3 le point d'intersection avec D_0 a l'air d'être le même !

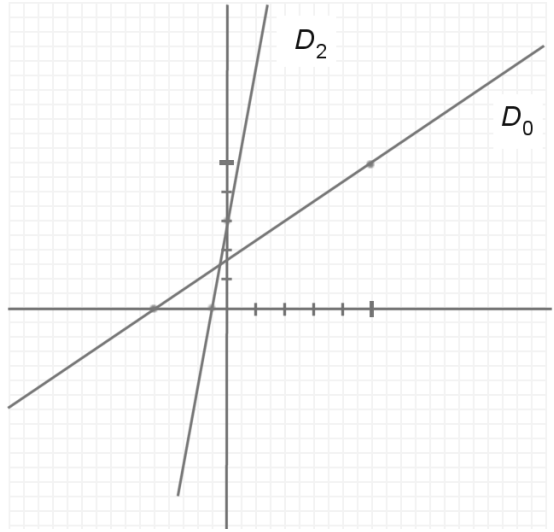


Figure II.19.3 : Droites D_0 et D_2.

On peut d'ailleurs le vérifier par le calcul en résolvant

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 & (t = 0) \\ 6x - y + 3 = 0 & (t = 2) \end{cases}$$

Exercice II.19.1 : Résoudre ce système.

II.19.5 Pourquoi le point d'intersection est le même

Explication heuristique : $\mathcal{D}$ est une famille de droites très simple. Une famille de droites très simple ne peut être formée que de droites passant toutes par un même point, ou toutes parallèles. Ça ne peut pas être du Mikado !

Calcul : Toutes les droites de $\mathcal{D}$ ont l'équation

$$(2 + 2t)x + (-3 + t)y + (5 - t) = 0 \qquad \text{(II.19.3)}$$

Cette équation peut se réécrire en distinguant ce qui est indépendant de t de ce qui a t en facteur :

$$2x - 3y + 5 + t(2x + y - 1) = 0 \qquad \text{(II.19.4)}$$

Donc toutes les droites, quel que soit t, passent nécessairement par la solution de

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.19.5)}$$

C'est-à-dire $x = -0,25$ et $y = 1,5$.

Exercice II.19.2 : Vérifier que $x = -0,25$ et $y = 1,5$ est la solution du système

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Noter que dans $\mathcal{D}$ il y a une droite qui manque. C'est précisément la droite $2x + y - 1 = 0$, c'est-à-dire celle qui a t en facteur dans l'équation (II.19.4).

Elle manque de la même manière que dans les équations de la forme $y = ax + b$, il manque les droites verticales.

La droite $2x + y - 1 = 0$ correspondrait dans $\mathcal{D}$ à $t = +\infty$. En effet quand t est très grand, la partie qui n'est pas en facteur de t devient négligeable. On peut diviser toute l'équation (II.19.4) par t pour s'en convaincre. Mais $+\infty$ n'est pas un nombre, c'est juste une manière de dire : cette droite-là est une droite « limite », et n'est pas dans $\mathcal{D}$.

Exercice II.19.3 : Refaire toute la leçon avec un autre jeu de paramètres $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ de votre choix, chacun fonction linéaire de t.

II.19.6 Puissance du concept de paramétrage

On vient de voir la technique du paramétrage appliquée aux coefficients d'une droite pour créer, avec des fonctions linéaires[1] d'un paramètre t, une collection de droites.

Cette technique s'avère très puissante.

D'une part elle permet de créer des collections de droites plus complexes que celles où toutes les droites passent par un même point. Quand on prend $a(t) = 2t$, $b(t) = -1$ et $c(t) = -t^2$, on obtient une famille de droites qui ne sont pas concourantes, mais qui ont une structure intéressante.

Exercice II.19.4 : Tracer les droites de coefficients $a(t) = 2t$, $b(t) = -1$ et $c(t) = -t^2$ pour quelques valeurs de t.

Que peut-on dire sur la géométrie de cette famille de droites ?

D'autre part, on a vu que les fonctions $y = f(x)$ ne peuvent pas correspondre à toutes les courbes dans le plan, car à chaque x ne doit correspondre qu'un seul y. Ainsi un cercle n'est pas une courbe dans le plan ayant une équation de la forme $y = f(x)$.

Certes, on peut le décomposer en deux demi-cercles symétriques par rapport à l'axe des x, et ayant chacun une telle formule. Mais la technique du paramétrage permet de faire plus simple.

Tous les points de coordonnées

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{II.19.6}$$

où t est un paramètre variant entre 0 et 2π forment un cercle centré à l'origine et de rayon 1.

1. On utilise l'adjectif linéaire pour toutes les fonctions de la forme $ax + b$, pas seulement ax, même si dans un sens strict linéaire ne s'applique qu'à la seconde relation, la première étant affine.

On peut de la même manière définir des courbes nettement plus compliquées qu'un cercle à l'aide d'un paramétrage des coordonnées de leurs points.

Par exemple, si a et b sont des nombres réels et θ est le paramètre,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + b\cos\theta + \dfrac{a}{2}\cos 2\theta \\ y = b\sin\theta + \dfrac{a}{2}\sin 2\theta \end{cases} \tag{II.19.7}$$

est le jeu d'équations d'un *limaçon de Pascal*, découvert par Étienne Pascal (1588-1651), le père de Blaise Pascal (1623-1662).

En prenant $a = 2$ et $b = 1$, voici soixante-trois points sur la courbe calculés en faisant varier θ de 0,1 à 6,3 de dixième en dixième.

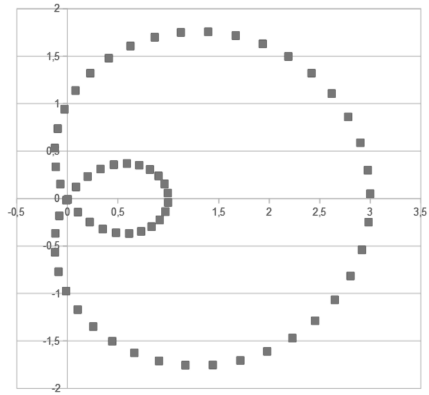
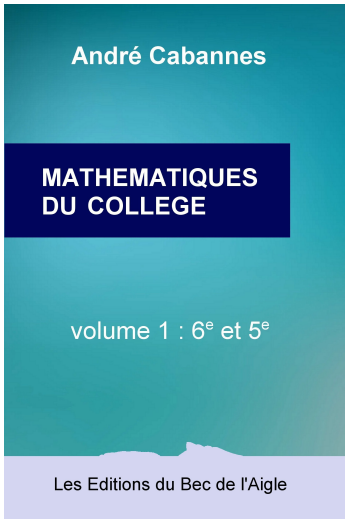


Figure II.19.4 : Limaçon de Pascal.

Exercice II.19.5 : Tracer le limaçon de Pascal pour plusieurs paires différentes des paramètres a et b. Essayer $(a,\ b) = (1,\ 1)$, $(a,\ b) = (2,\ 1)$, $(a,\ b) = (3,\ 1)$, etc.

Catalogue des

ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE

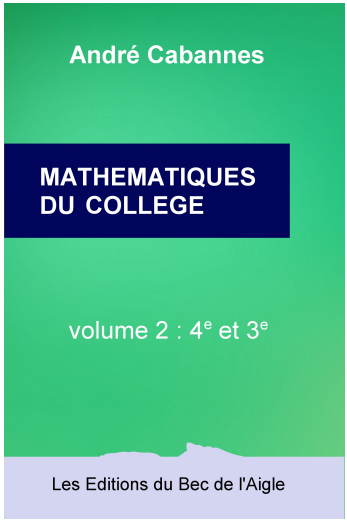


www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents

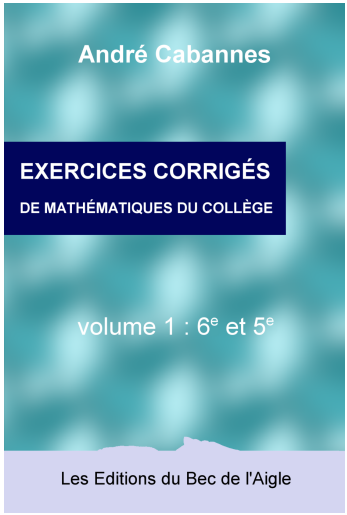


www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

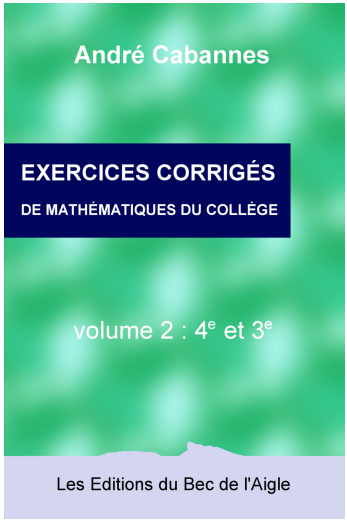
Volume 2 : 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



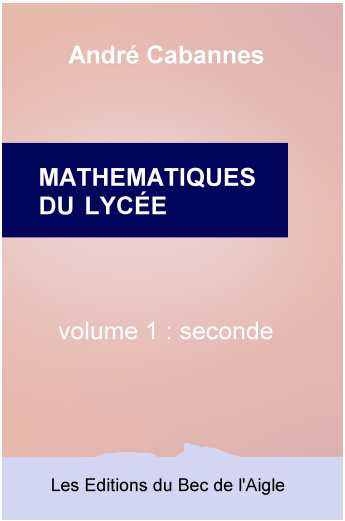
www.amazon.fr/dp/2958738566
Maths du collège volume 1

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



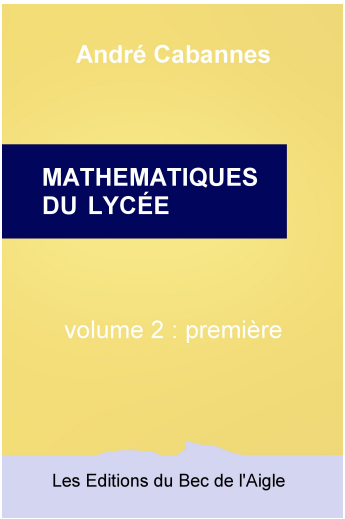
www.amazon.fr/dp/2958738574
Maths du collège volume 2

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



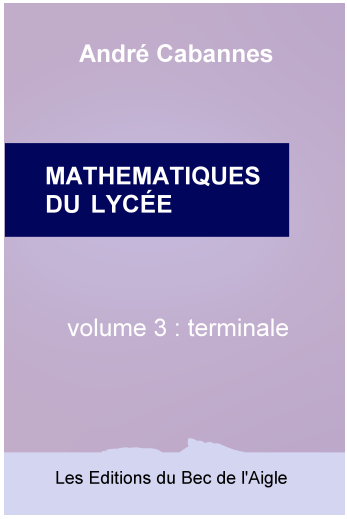
www.amazon.fr/dp/2957239183
Cours de mathématiques de seconde

à l'intention des lycéens et de leurs parents



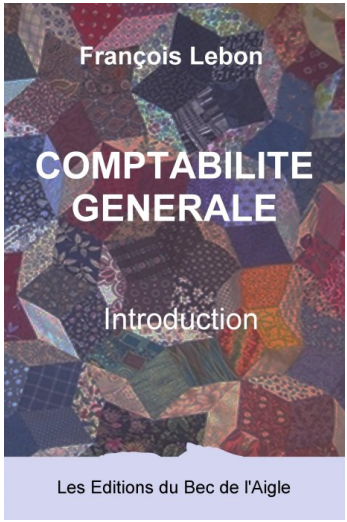
www.amazon.fr/dp/2957239191
Cours de mathématiques de première

à l'intention des lycéens et de leurs parents

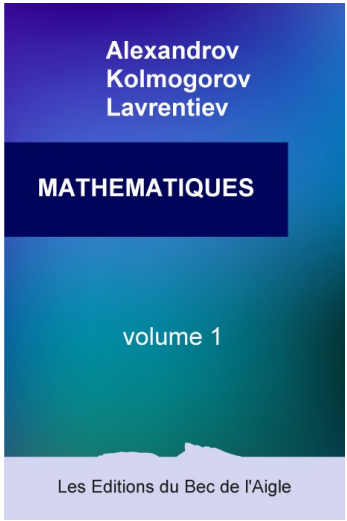


www.amazon.fr/dp/2958738507
Cours de mathématiques de terminale

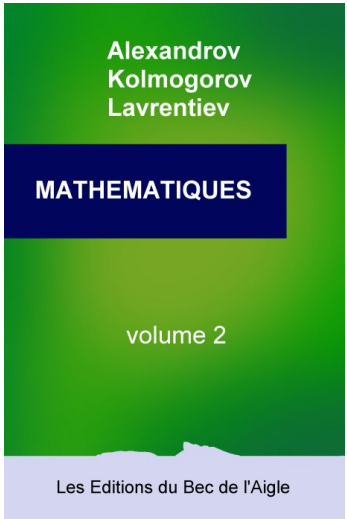
à l'intention des lycéens et de leurs parents



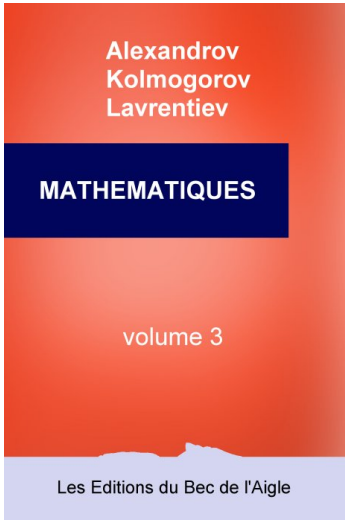
www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



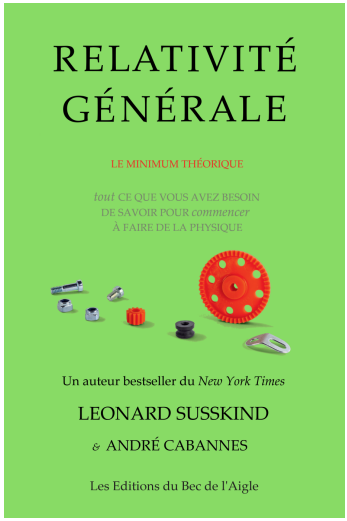
www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)

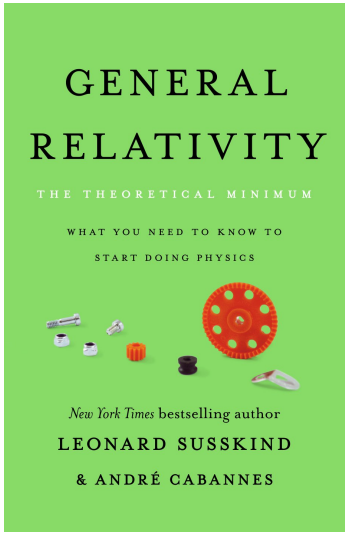


www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



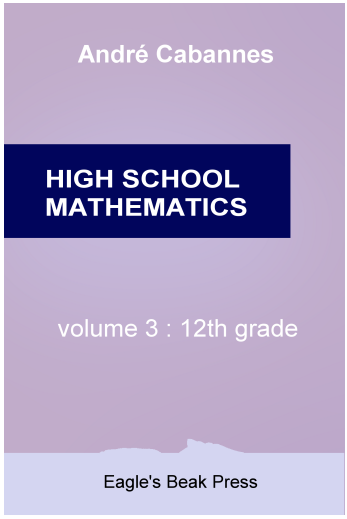
www.amazon.fr/dp/2957239175
Cours de physique (niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



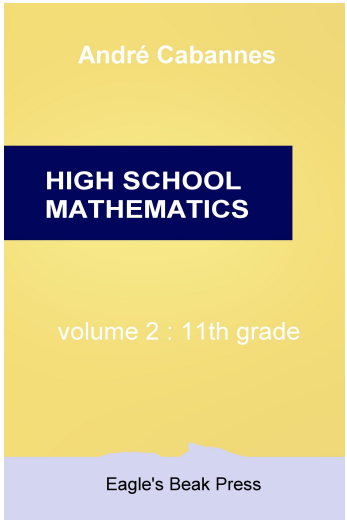
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



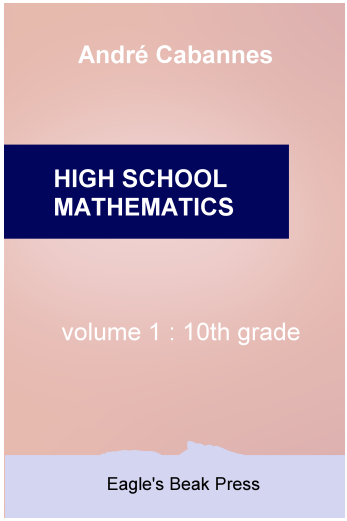
www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

Volume 3 : 12th grade



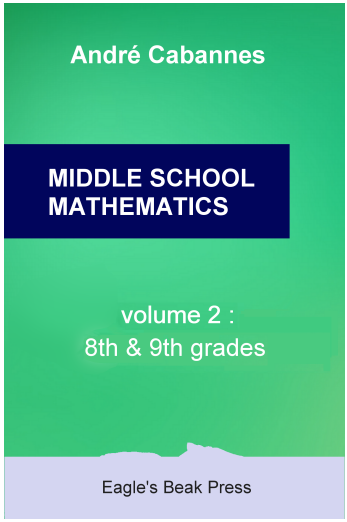
www.amazon.com/dp/2958738523
High school mathematics

Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531
High school mathematics

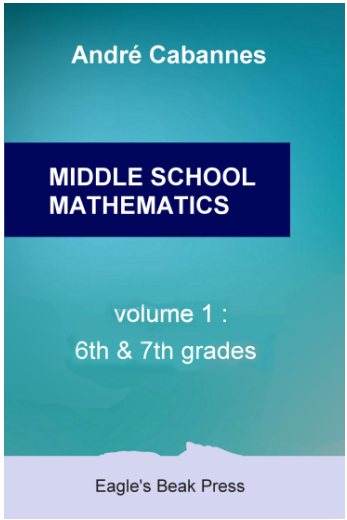
Volume 1 : 10th grade



www.amazon.com/dp/295873854X
Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and their parents



www.amazon.com/dp/2958738558
Middle school mathematics

Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and their parents