II.11 Histoire de l'équation trinôme

II.11.1 Introduction

Dans ce cours de Troisième, nous avons atteint un palier. Nous avons fini les leçons sur l'arithmétique et fini un premier groupe de leçons sur l'algèbre – les équations à une inconnue de degré supérieur ou égal à 2. La suite va être consacrée

1. aux fonctions – elles sont par certains aspects un domaine intermédiaire entre l'algèbre et la géométrie – et aux systèmes d'équations linéaires, c'est-à-dire du premier degré, mais à plusieurs inconnues,
2. puis à la géométrie, en utilisant maintenant toute notre boîte à outils, cela nous conduira en particulier à la géométrie analytique,
3. enfin à un peu de probabilités et de statistiques.

Comme nous l'avons fait dans le cours de Sixième, faisons une pause et consacrons une leçon à l'histoire. Le sujet choisi est l'histoire de l'équation trinôme. Elle nous permettra de mieux comprendre comment évoluent les mathématiques, comment un thème au départ très compliqué et à la portée seulement des intellects les plus puissants, se décante, s'organise, se simplifie, invente ses outils et devient accessible à n'importe quelle personne qui est allée à l'école.

Les nombres avaient déjà suivi une évolution comparable.

II.11.2 Rappel sur l'évolution des nombres

Aux temps préhistoriques, les nombres étaient représentés par des petits cailloux ou des marques équivalentes. Les petits nombres étaient sans doute simples à comprendre. Que cinq plus trois fassent huit était compréhensible par tous, quoique la notion de nombre abstrait n'avait pas encore cours.

Mais l'addition de cent-vingt-deux et soixante-quinze était un problème formidable à plusieurs égards. Chacun des deux nombres était « énorme ». Il pouvait correspondre à la population d'une grande tribu. Et l'addition des deux donnait un nombre inconcevable.

Le système de notation grec et romain les nota CXXII et LXXV. C'était un progrès. Mais déterminer que la somme faisait le nombre CC moins III, qu'on notait CXCVII, était encore un problème difficile pour des non-spécialistes.

Puis vint le système décimal positionnel indo-arabe qui notait les deux nombres 122 et 75. Le calcul de leur somme devenait élémentaire en « posant l'addition » et mettant en œuvre un petit algorithme

$$\begin{array}{rr} & 122 \\ + & 75 \\ \hline = & 197 \end{array}$$

Figure II.11.1 : Addition en chiffres arabes.

Cette addition est maintenant à la portée d'un enfant de sept ans. Et normalement toute personne qui a fini l'école sait la faire, sans doute même de tête en observant que 122 plus 75 est pareil que 125 plus 75 moins 3, c'est-à-dire 200 moins 3, soit 197.

Exercice II.11.1 : Faisons un exercice totalement hors de portée des hommes et des femmes du paléolithique. Effectuer à la main la multiplication

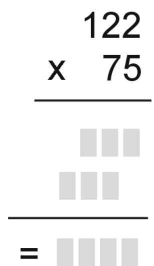

Figure II.11.2 : Multiplication en chiffres arabes.

Cette section illustre comme le maniement des nombres est passé – en quelques milliers d'années– de discipline très difficile à discipline très facile.

Nous allons maintenant voir la même chose avec l'équation trinôme.

II.11.3 L'équation trinôme chez les Babyloniens

Á l'époque d'Hammourabi, un grand roi du Premier empire babylonien, qui régna d'environ -1792 à -1750[1], nous disent les historiens, les Babyloniens connaissaient déjà beaucoup de mathématiques – beaucoup plus que les Égyptiens.

1. Il est célèbre en particulier pour avoir édicté un code de loi en vieux dialecte babylonien de l'akkadien, gravé en caractères cunéiformes sur une stèle exposée au Musée du Louvre.

Les Égyptiens savaient résoudre des équations du premier degré :

« Si je prends un nombre, que je le multiplie par trois, que j'ajoute encore cinq, et que j'obtiens vingt, quel est le nombre initial ? »

Ils savaient aussi que la corde à treize nœuds (cf. figure I.19.6, page 127) permettait de faire des angles droits. Mais on n'a jamais retrouvé de solution d'équation du second degré en Égypte ancienne et il semble qu'ils n'aient jamais fait le lien entre leur corde-équerre et le théorème de Pythagore. Les plus vieilles mathématiques égyptiennes documentées sont celles qui apparaissent sur le papyrus de Rhind, qui date d'environ -1550, soit deux siècles après le règne d'Hammourabi.

Les Babyloniens de l'ancien empire en revanche résolvaient des équations du second degré et connaissaient très vraisemblablement le théorème de Pythagore (mille ans avant Pythagore !), comme l'attestent des dessins retrouvés sur des tablettes d'argile cuite en Mésopotamie.

Leurs problèmes étaient toujours posés sous forme numérique. Voici un problème retrouvé sur une tablette :

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'. »

Il s'agit de trouver le côté du carré. Les Babyloniens utilisaient un système de numération en partie à base 60. Ce qu'ils notaient 45' est notre fraction 45/60, soit 3/4.

Avec nos notations modernes, si on appelle x la longueur inconnue du côté du carré, l'équation babylonienne à résoudre est

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \tag{II.11.1}$$

Voici la solution qu'ils donnaient :

« Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30'. Tu croiseras 30' et 30' : 15'. »

« Tu ajouteras 15' à 45' : 1. C'est le carré de 1. »

« Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré. »

Traduit en explications plus facilement compréhensibles pour nous, le mathématicien babylonien part du nombre 1. Il le divise en deux et obtient 1/2. Il multiplie les deux demis entre eux et obtient 1/4. Il ajoute ce quart aux trois quarts initiaux et obtient à nouveau 1, qu'il voit comme un carré. Il prend la racine carrée, qui est encore 1. Il retranche le 1/2 qui avait servi à obtenir 1/4, et obtient 1/2. C'est la solution.

Il résout en réalité, toujours avec nos notations modernes, l'équation générale

$$x^2 + px = q \tag{II.11.2}$$

où p et q sont des nombres positifs, qui peuvent être entiers ou des fractions.

La solution babylonienne consiste à prendre p, le diviser par 2, élever le résultat au carré, ajouter q, prendre la racine carrée de ce qu'on a obtenu, enfin retrancher $p/2$.

C'est-à-dire que le mathématicien babylonien calcule

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2} \tag{II.11.3}$$

C'est exactement la même chose que notre formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{II.11.4}$$

pour les deux solutions de l'équation trinôme $ax^2 + bx + c = 0$. Sauf que les Babyloniens ne retiennent que la solution positive, c'est-à-dire avec un signe plus devant le radical, car pour eux – comme pour la plupart d'entre nous – la solution $-1,5$ à l'équation $x^2 + x - {}^3\!/_4 = 0$ est dénuée de sens :-)

II.11.3 Le trinôme chez les Grecs

Après avoir démarré en Ionie, en Grande Grèce et à Athènes, les mathématiques grecques ont été florissantes dans l'École d'Alexandrie qui fonctionna d'environ -300, quelques années après la fondation de la ville par Alexandre le Grand (-356, -323) en -331, jusqu'à sa fermeture en +529 par l'empereur Justinien (482-565).

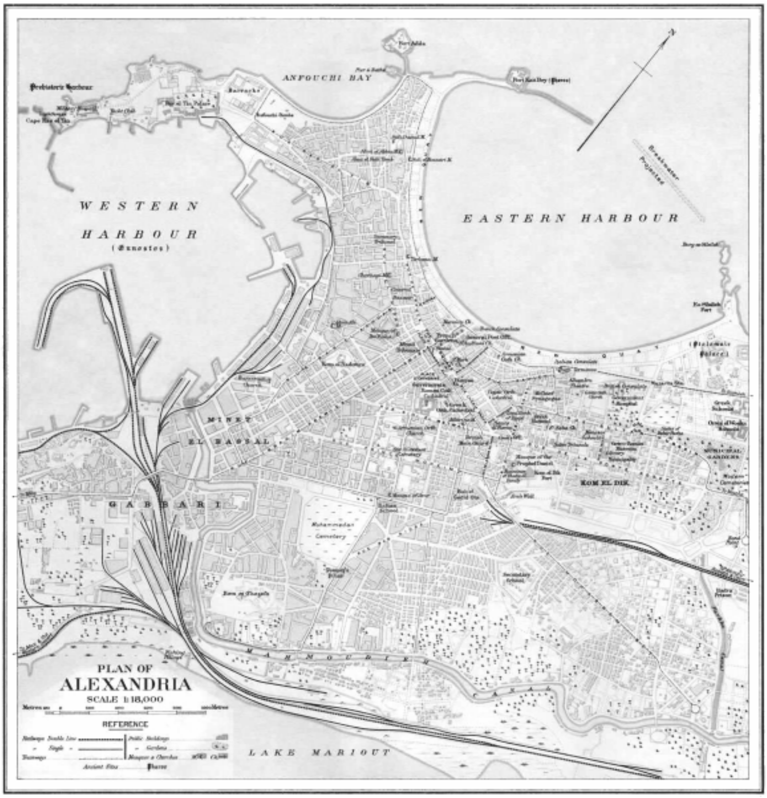

Figure II.11.3 : Plan de la ville d'Alexandrie. Source : E.M. Forster, *Alexandria : A History and Guide*, 1922, Projet Gutenberg `https://www.gutenberg.org/files/57010/57010-h/57010-h.htm`

Elle compta la plupart des grands mathématiciens grecs d'Euclide à Diophante, mais aussi des hommes de lettres, des médecins, des philosophes néo-platoniciens comme Origène (c. 185 - c.253), des théologiens, des érudits bibliques, etc.

Dans son livre *Éléments*, Euclide parle du trinôme. Il donne essentiellement des interprétations géométriques comme nous l'avons fait plus haut pour

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{(II.11.5)}$$

voir section II.8.4, pp. 273-275.

Exercice II.11.2 : Construire une interprétation géométrique de l'identité

$$x^2 + y^2 = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \qquad \text{(II.11.6)}$$

Mais, s'il parle d'algèbre, Euclide ne traite pas à proprement parler des équations.

Les mathématiciens suivants dans l'histoire qui ont fait progresser notre connaissance de l'équation trinôme sont les mathématiciens de l'école arabe, au premier chef Al-Khwarizmi (c.780 - c.850). On se rappelle qu'il était d'origine perse, mais qu'il vivait à Bagdad, et travaillait et écrivait en arabe. Aussi est-il considéré comme faisant partie de l'école des mathématiques arabes.

II.11.4 L'équation trinôme chez les Arabes

Dans son célèbre ouvrage *Kitab al-jabr*, Al-Khwarizmi explique, reformulé dans notre langage moderne, que toutes les équations du premier et du second degré se ramènent à l'un des six types suivants, avec des coefficients positifs :

$$\begin{aligned} ax^2 &= bx \\ ax^2 &= c \\ ax &= c \\ x^2 + bx &= c \\ x^2 + c &= bx \\ bx + c &= x^2 \end{aligned} \qquad \text{(II.11.7)}$$

Les Arabes comme les Anciens ne travaillaient pas encore avec des nombres négatifs.

Les trois derniers types sont distingués seulement pour ne pas avoir à écrire de signe moins. Quant aux trois premiers, ils éliminent aussi les solutions négatives [2].

2. A fortiori, ils ne travaillaient pas avec des nombres complexes, et donc ne prenaient pas en considération une équation comme $x^2 + 1 = 0$.

Pour le démontrer, Al-Khwarizmi utilise justement les techniques de remplacement d'un nombre d'un côté par sa soustraction de l'autre côté, et d'élimination de nombres identiques de chaque côté – le cœur de sa technique dont le premier volet est *al-jabr* et le second *al-muqabala*[3].

Exemple : Partons de l'équation $x^2 + (10 - x)^2 = 58$. Et transformons-la de manière successive

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \quad 2x^2 + 100 - 20x = 58 \\
&\rightarrow \quad 2x^2 + 100 = 58 + 20x \\
&\rightarrow \quad 2x^2 + 42 = 20x \\
&\rightarrow \quad x^2 + 21 = 10x
\end{aligned}$$

ce qui est le cinquième type dans la liste (II.11.7).

Puis, toujours avec son exemple numérique, Al-Khwarizmi explique les manipulations à faire pour arriver aux solutions. Sous forme moderne, il arrive à

$$x_1 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \tag{II.11.8a}$$

et

$$x_2 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \tag{II.11.8b}$$

Cela donne

$$x_1 = 3$$

et

$$x_2 = 7$$

Le mathématicien explique, toujours avec des exemples, comment résoudre les six types distingués dans (II.11.7).

3. Nous nous sommes inspirés pour cette section du site `http://labomath.free.fr/faidherbe/premS/cours2012/trinome/docs/histoiredesequations.pdf`.

Il parle implicitement du discriminant, expliquant, reformulé en termes modernes, que l'équation $ax^2 + bx + c$ n'a pas de solution si b^2 est plus petit que $4ac$.

Par exemple une équation du cinquième type, comme $x^2 + 40 = 10x$, n'a pas de solution.

Exercice II.11.2 : Considérons l'équation

$$x^2 + c = 10x$$

On vient de voir qu'elle a deux solutions quand $c = 21$, et qu'elle n'a pas de solution quand $c = 40$.

1. Donner le domaine des valeurs de c pour lesquelles l'équation a une ou des solutions.
2. Dessiner la droite $y = 10x$ et les courbes $y = x^2+c$ pour $c = 21$ et $c = 40$, et donner une interprétation géométrique de votre réponse à la question n°1.

Nous pouvons conclure du travail d'Al-Khwarizmi que les Arabes avaient *totalement résolu* l'équation trinôme.

II.11.5 Les équations polynomiales au XVIe siècle

Les mathématiciens suivants qui firent des progrès importants dans la résolution des équations polynomiales sont des Italiens au XVIe siècle.

Racontons l'histoire à grands traits.

L'équation trinôme étant totalement résolue, ils s'attaquèrent à l'équation polynomiale de degré 3 :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{II.11.9}$$

On a montré dans la leçon précédente qu'elle a toujours au moins une solution dans les nombres réels, et parfois trois.

Le mathématicien Scipion del Ferro (1465-1526) trouva une méthode générale de résolution, mais ne la publia pas. L'un de ses élèves à qui il avait dit qu'il avait la solution générale défia le mathématicien Niccolò Tartaglia (1499-1557) de trouver la solution d'une trentaine d'équations du 3e degré que l'élève lui soumit.

Tartaglia sécha longtemps, puis trouva une solution générale et résolut la trentaine d'équations qui lui avaient été soumises en deux heures [4].

La méthode consiste tout d'abord à transformer l'équation (II.11.10) en une forme réduite sans monôme du second degré. Il suffit pour cela de changer de variable et au lieu de rechercher x de rechercher $z = x + \frac{b}{3a}$, ce qui est un problème parfaitement équivalent.

> **Exercice II.11.3** : Vérifier que si dans l'équation (II.11.10) on remplace x par $z = x + \frac{b}{3a}$, on obtient une équation du 3e degré en z qui n'a pas de terme en z^2.
>
> *Aide* : Dans l'équation (II.11.10) substituer $z - \frac{b}{3a}$ à la place de x.

Sans perte de généralité, on travaille alors maintenant sur une équation de la forme générale

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{II.11.10}$$

Il y a ensuite une idée géniale : remplacer l'inconnue unique z par deux inconnues u et v telles que $z = u + v$.

Ça paraît absurde mais en fait cela va donner une marge de manœuvre car il y a beaucoup de paires $(u,\ v)$ dont la somme fait z. On pourra en choisir une particulière qui rend service. On sera amené à imposer une certaine valeur à uv.

Je saute les détails. Tartaglia arrive au système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

4. Source : Alexandrov, Kolmogorov, Lavrentiev, *Mathématiques*, Les Éditions du Bec de l'Aigle, vol. 1, 2020, pp. 440-443.

Cela implique que u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation en X

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{II.11.11}$$

Exercice II.11.4 : Monter que si x_1 et x_2 sont tels que $x_1 + x_2 = 5$ et $x_1x_2 = 4$, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

D'une manière générale montrer que si x_1 et x_2 sont tels que $x_1 + x_2 = -b$ et $x_1x_2 = c$, x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation

$$x^2 + bx + c = 0$$

Finalement, pour l'équation (II.11.10), Tartaglia explique qu'il faut que le discriminant $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ soit positif. Alors il arrive à la solution

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \tag{II.11.12}$$

Cette formule porte le nom de formule de Cardan. La raison est la suivante. Jérôme Cardan était un mathématicien réputé de l'université de Milan. Il parvint à ses oreilles que Tartaglia avait résolu l'équation du 3e degré. Cardan pria instamment Tartaglia de lui dire comment il avait fait, promettant de ne pas le répéter. Tartaglia finit par lui expliquer. Puis Cardan publia la solution. D'où la formule de Cardan. Ainsi les hommes vivent et inscrivent leur nom dans l'histoire.

II.11.6 De la formule de Cardan aux nombres complexes

Les mathématiciens italiens observèrent quelque chose d'extrêmement étrange :

Quand ils cherchaient à résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \tag{II.11.13}$$

et voulaient appliquer la formule de Cardan, ils tombaient sur l'équation intermédiaire (II.11.11) avec un discriminant négatif. Donc la formule de Cardant ne pouvait pas marcher.

La formule de Cardan serait en effet

$$\sqrt[3]{2+11\times\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\times\sqrt{-1}} \tag{II.11.14}$$

où apparaît le radical impossible $\sqrt{-1}$.

Cependant l'équation (II.11.13) a clairement les trois solutions tout à fait réelles

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= \sqrt{3}-2 \\ x_3 &= -2-\sqrt{3} \end{aligned} \tag{II.11.15}$$

Son graphe est

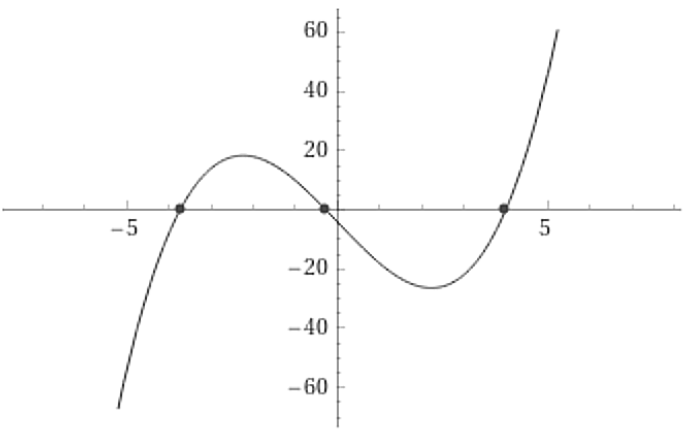

Figure II.11.4 : Courbe d'équation $y = x^3 - 15x - 4$.

Se pourrait-il que $\sqrt[3]{2+11\times\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\times\sqrt{-1}}$ soit en fait l'une des racines ?

Il revint à l'Italien Rafael Bombelli (1526-1572) de franchir le pas, de déclarer qu'il fallait traiter $\sqrt{-1}$ comme n'importe quel autre nombre, lui appliquer les mêmes règles arithmétiques, tout en sachant que quand on le prenait au carré ça faisait -1.

Il montra que la formule de Cardan (II.11.14) avait pour valeur 4. Les nombres complexes étaient nés.

Ils laissèrent les mathématiciens plus ou moins perplexes pendant trois siècles, jusqu'à ce que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) et quelques autres les clarifient totalement.

L'histoire est comparable à celles de l'introduction des nombres négatifs au XIIIe siècle qu'encore au XVIe siècle François Viète (1540-1603) ne touchait qu'avec une perche de 10 mètres.

Mais comme pour les nombres négatifs trois siècles plus tôt, les utilisateurs furent pragmatiques et employèrent rapidement les nombres complexes, dont on avait au moins à tâtons défini les règles de manipulation. Et ces nouveaux nombres qui permettaient de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ et même *toutes les équations polynomiales* (!) – c'est le théorème de d'Alembert-Gauss – s'avérèrent extrêmement utiles.

Nous les étudierons au lycée.

II.11.7 Équations polynomiales de degré supérieur à trois

Après les succès avec l'équation du troisième degré, l'Italien Ludovico Ferrari (1522-1565) résolut aussi avec des manipulations astucieuses l'équation du quatrième degré.

Puis les mathématiciens essayèrent pendant trois siècles sans succès de résoudre de manière générale l'équation de degré 5. Jusqu'à ce que Niels Henrik Abel (1802-1829) puis Évariste Galois (1811-1832) avec une théorie plus générale ne montrent que c'était impossible.

Les mathématiques étaient déjà aux XVIIe et XVIIIe siècles entrées, avec le calcul intégral et différentiel, dans une période très riche et féconde en résultats théoriques et appliqués.

Les résultats sur la résolution des équations polynomiales – quand elle était possible ou pas – donnèrent encore une accélération aux mathématiques, qui entrèrent alors dans une période de très grande créativité, qui dure toujours.