Partie I : Classe de Sixième

Contenu :

I.34 Découpage du cube en trois pyramides identiques

I.34.1 Introduction

Nous allons construire avec du papier quadrillé cartonné, une paire de ciseaux, et de la colle une pyramide issue d'un cube. La pyramide aura pour base la face en bas du cube, et pour sommet un des coins supérieurs.

Nous allons voir que le volume de cette pyramide est exactement le tiers de celui du cube. Et mieux que ça : on pourra reconstituer le cube avec trois pyramides identiques à celle-ci.

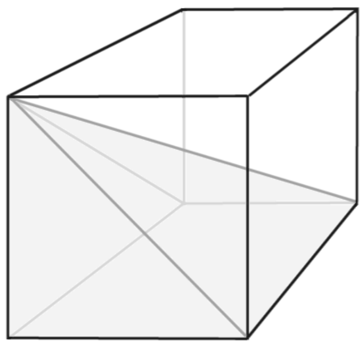


Figure I.34.1 : Pyramide à base carrée inscrite dans un cube.

Cette petite « expérience » de mathématiques a d'importantes conséquences. Elle éclaire la nature de l'espace à trois dimensions et le calcul des volumes.

On va voir que cela conduit à la généralisation à l'espace à trois dimensions des faits suivants qui nous sont familiers dans le plan :

1. Deux triangles rectangles et isocèles identiques permettent de reconstituer un carré.
2. L'aire d'un triangle quelconque est le produit de la longueur d'un côté par la hauteur perpendiculaire, divisé par 2.

I.34.2 Patron de la pyramide

Pour construire la pyramide, nous partons du patron suivant :

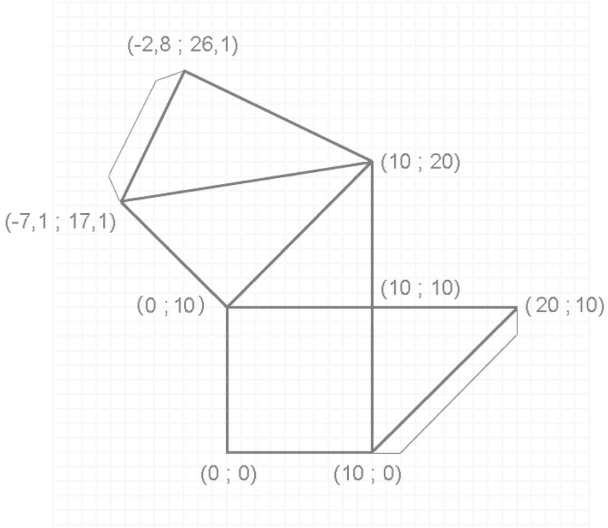


Figure I.34.2 : Patron pour construire la pyramide.

I.34.3 Construction de trois pyramides identiques et assemblage du cube

On découpe selon le patron et on commence à plier.

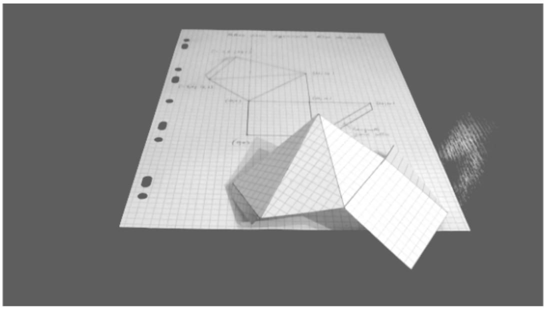


Figure I.34.3 : Étape de la construction (1).

On achève la première pyramide.

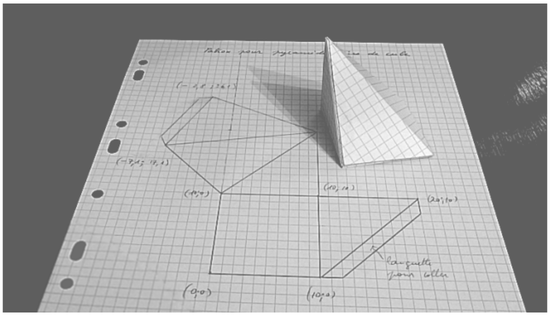


Figure I.34.4 : Étape de la construction (2).

On fabrique trois pyramides selon le même patron (appelé aussi un « modèle »). Et on commence à les ajuster pour faire un cube.

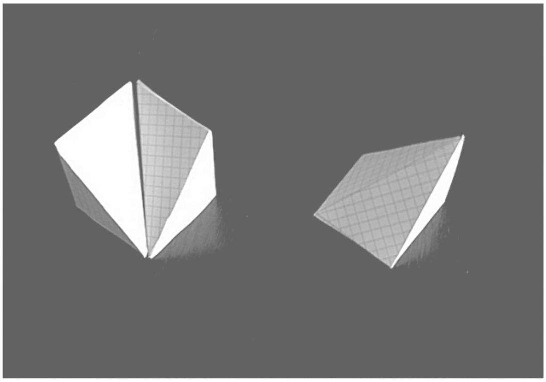


Figure I.34.5 : Étape de la construction (3).

Les trois pyramides s'assemblent comme trois pièces d'un puzzle à trois dimensions pour faire un cube.

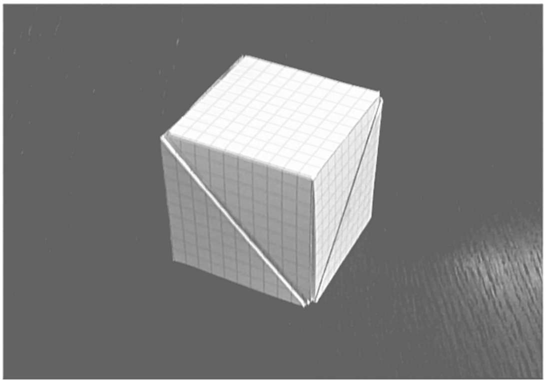


Figure I.34.6 : Étape de la construction (4).

Une question se pose : y a-t-il un vide à l'intérieur du cube ou bien les trois pyramides le remplissent-elles totalement ? On voit aisément qu'étant donné que les plans en biais de la pyramide modèle (fig. I.34.1) font un angle de 45° avec la base, c'est impossible qu'il y ait un vide à l'intérieur.

Donc le cube est bien rempli exactement et totalement par les trois pyramides. Cela nous conduit maintenant à d'importants calculs de volume.

I.34.4 Volume de la pyramide

Puisque les trois pyramides identiques remplissent le cube, la pyramide initiale a un volume égal au tiers de celui du cube. C'est donc la surface de sa base (= aire de sa base) multipliée par sa hauteur divisée par 3.

On peut écrire :

$$V = S \times h \times \frac{1}{3} \tag{I.34.1}$$

où V est le volume de la pyramide, S la surface de sa base, c'est-à-dire une des faces du cube, et h la hauteur, c'est-à-dire une arête du cube.

Nous allons nous servir de ce résultat pour l'étendre à n'importe quelle pyramide, et même à n'importe quel cône.

Cette leçon de pliage a un rôle important dans l'ensemble de nos cours de la 6e à la Terminale. De la même manière que n'importe quel triangle a pour surface sa base multipliée par sa hauteur divisée par deux, n'importe quelle pyramide ou cône a pour volume sa base (c'est-à-dire, l'aire de celle-ci) multipliée par sa hauteur divisée par trois.

I.34.5 Volume d'une pyramide quelconque et d'un cône

Pour généraliser la formule (I.34.1), tout d'abord, à n'importe quelle pyramide, nous allons utiliser notre technique de découpage en fines tranches horizontales que nous avons déjà utilisée pour un triangle (fig. I.26.8, page 194).

Maintenant que nous savons que le volume de la pyramide de la figure I.34.4, qui a pour base une face du carré et dont l'une des arêtes est verticale, nous pouvons découper cette pyramide en fines tranches horizontales comme des boîtes de pizza.

Ensuite nous pouvons déplacer les boîtes de pizza de façon à faire une pyramide dont le sommet est au milieu de la face supérieure du cube. De même que sur la figure I.26.8, p. 194, quand on fait glisser les tranches horizontales on peut conserver un triangle, ici on peut montrer qu'on peut conserver une pyramide.

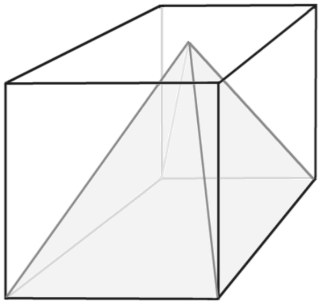


Figure I.34.7 : Nouvelle pyramide obtenue à partir de celle de la figure I.34.1 en faisant glisser les tranches horizontales afin qu'elles soient toutes centrées au-dessus du centre du carré en bas.

Cela ne change pas le volume de la pyramide. Il est toujours égal à sa base multipliée par sa hauteur divisée par 3. On peut même faire glisser le sommet de la pyramide n'importe où sur le plan de la face supérieure du cube sans changer le volume de la pyramide.

Maintenant regardons ce qui se passe quand on part de la pyramide initiale et qu'on l'étire verticalement, en maintenant son sommet sur l'arête verticale du cube. Doublons par exemple la hauteur de la pyramide (en gardant la même base).

Son nouveau volume va être double de celui de la pyramide initiale. Pourquoi ? Une façon de le voir est la suivante : imaginons la pyramide initiale formée d'une *très grande* quantité de petits cubes. Pour obtenir la nouvelle pyramide de hauteur double, il suffit de remplacer chaque petit cube par son double vertical. Donc la nouvelle pyramide aura le volume double. Par conséquent la formule (I.34.1) s'applique toujours :

$$V = S \times h \times \frac{1}{3}$$

Exercice I.34.1 : Montrer que la pyramide de hauteur 3 unités (où 1 unité est la longueur d'une arête du cube) et ayant pour base la face inférieure du cube d'en bas a le même volume que ce cube.

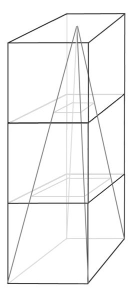


Figure I.34.8 : Pyramide trois fois plus haute que le cube d'en bas. Son volume est le même que celui du cube.

Exercice I.34.2 : En découpant le volume de la pyramide précédente en 12 petites pyramides à base carrée identiques plus deux parallélépipèdes rectangles à base carrée, sauriez-vous calculer les volumes de pyramide contenus respectivement dans le premier cube, dans le second cube, et dans le troisième cube ?

Exercice I.34.3 : Partir d'un cube unitaire comme dans la figure I.34.1. Le découper en 6 pyramides chacune ayant pour base une face du cube et pour sommet le centre du cube. En déduire une autre preuve de la formule (I.34.1).

De même qu'on peut faire glisser ou étirer les tranches de la pyramide initiale pour faire une pyramide à base carrée inclinée comme on veut et de hauteur quelconque, on peut aussi fabriquer une pyramide à *base quelconque* à l'aide d'un assemblage d'un *très grand nombre* de pyramides à base carrée. Donc la formule du volume s'applique aussi à une pyramide quelconque.

Enfin on peut remodeler chaque tranche horizontale pour en faire un disque. On produit alors un empilement de disques de rayons décroissants régulièrement formant un cône. Par conséquent la formule du volume s'applique encore aux cônes.

I.34.6 Géométrie et nombres

On peut faire de la géométrie sans utiliser les nombres. Mais on peut aussi découvrir des liens entre la géométrie et l'arithmétique, et c'est très amusant.

Voici un exemple. Considérons un cube, par exemple de 1 mètre de côté. Chaque côté peut être découpé en un millier de millimètres. Et le cube lui-même peut être vu comme l'assemblage de mille couches de 1 m^2 chacune et d'un millimètre de hauteur. Chaque couche peut être vue comme formée de mille fois mille petits cubes d'un millimètre de côté. Et le cube complet est l'assemblage de mille fois mille fois mille petits cubes de 1 mm par 1 mm par 1 mm, soit un milliard de petits cubes.

Maintenant avec les petits cubes d'un millimètre de côté, on va construire une pyramide comme au début de la leçon. Elle ne sera pas parfaite, car elle aura certaines faces pas totalement lisses, mais presque – comme les pyramides d'Égypte.

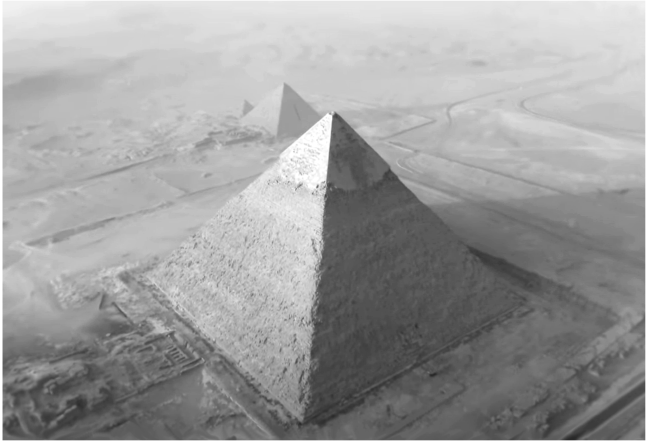


Figure I.34.9 : Pyramide de Khéops à côté du Caire en Égypte. Source : National Geographic.

Voici comment on procède : d'abord sur une base d'un mètre par un mètre, on range un million de petits cubes, pour obtenir une première couche d'un mètre carré, et un millimètre de hauteur. Puis on dépose une deuxième couche carrée formée de seulement 999 par 999 petits cubes, calée contre une des arêtes verticales [1]. Puis une troisième couche de 998 par 998 petits cubes. Et ainsi de suite jusqu'à un dernier petit cube unique sur la millième couche.

1. Elle n'aura pas exactement la même forme que celle de Khéops, puisqu'elle aura une arête verticale. Mais on a vu plus haut que cela n'a pas d'importance. Le volume est le même pour la pyramide de la figure I.34.1 et la pyramide de la figure I.34.7.

Cela forme pratiquement la même pyramide que celle construite dans la leçon. Donc son volume est presque exactement $1/3$ de mètre cube. En d'autres termes, elle contient presque exactement 1 000 000 000/3 petits cubes. On a donc démontré que la somme des nombres au carré de 1 à 1000 est presque égale à un tiers de milliard, ce qu'on écrit

$$1 + 4 + 9 + 16 + ... + 999^2 + 1000^2 \;\approx\; \frac{1\ 000\ 000\ 000}{3}$$

De fait, on peut vérifier avec un tableur que

$$1 + 4 + 9 + 16 + ... + 999^2 + 1000^2 = 333\ 833\ 500$$

La formule exacte pour la somme des carrés de 1 à n est

$$1 + 4 + 9 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(I.34.2)}$$

On peut vérifier que, pour $n = 1000$, ça donne bien le nombre 333 833 500.

Les Grecs de l'Antiquité faisaient de la géométrie en utilisant aussi peu que possible les nombres, car l'École de Pythagore au VIe siècle avant J.-C. avait découvert qu'il existait des longueurs qui n'étaient pas une fraction l'une de l'autre. Concrètement, si on considère un carré de côté 1 mètre, alors sa diagonale a une longueur qui n'est pas une fraction a/b où a et b sont des nombres entiers. C'est à peu près 1,414 mètre, mais pas exactement. Et on démontrera plus tard qu'aucune fraction ne peut la représenter exactement [2].

De même si notre cube a un mètre de côté, sa « grande diagonale » dans l'espace n'est pas une fraction de 1. C'est à peu près 1,732 m, mais pas exactement.

2. C'est quelque chose qu'on étudiera en 3e, mais l'idée est très simple : si a/b est la longueur de la diagonale, alors on montrera, par le théorème de Pythagore, que $a^2/b^2 = 2$, donc $a^2 = 2b^2$. Mais c'est une incohérence car il n'y a pas le même nombre de facteurs 2 à droite et à gauche. Donc la diagonale ne peut pas avoir la longueur a/b.

Cette découverte avait convaincu les Grecs d'éviter autant que possible le concept de longueur *exprimée numériquement* dans les raisonnements géométriques, même si bien sûr on continuait à *comparer* des longueurs, et à mesurer des distances (par exemple celle de Marathon à Athènes qui fait environ 40 kilomètres), des champs, des volumes, etc. C'est la raison pour laquelle la géométrie grecque est une « géométrie pure » qui utilise peu les longueurs numériques et pas du tout les coordonnées dans un repère cartésien.

La découverte avait aussi bouleversé Pythagore, qui pensait – de manière un peu floue – que « tout était nombre », y compris en musique. Pythagore était un génie, proche de la folie, alors il a ordonné de cacher cette découverte. Si bien que Démocrite, né pourtant plus de 30 ans après la mort de Pythagore, pouvait encore penser que « les segments de droite étaient composés d'un nombre fini d'atomes » – ce qui conduisait tout de suite à des contradictions avec « l'incommensurabilité » de certaines longueurs.

Mais la science a progressé. Euclide a écrit un traité qui a eu une carrière de plus de 2000 ans. Apollonius a étudié les coniques. L'École d'Alexandrie tardive a inventé, parmi d'autres choses, la *géométrie projective*, les théorèmes de Pappus et Ménélaüs, etc. – et je ne cite que les étapes les plus notables qui me viennent à l'esprit. Les Arabes ont développé l'*algèbre* et la *trigonométrie*. Le Moyen Âge et la Renaissance en Europe ont aussi des réussites à leur actif.

En ce qui concerne les « infiniment petits » (comme le sont les « tout petits cubes » avec lesquels on vient de construire une pyramide, et comme le sont en quelque sorte les atomes), les progrès suivants furent accomplis seulement au XVIIe siècle en Europe par Leibniz et Newton, en se reposant sur les travaux importants de beaucoup de savants avant eux, à commencer par Descartes.

C'est une histoire passionnante, et la construction d'un corpus de savoirs encore plus passionnant : il explique, pour une bonne part, comment fonctionne le monde qui nous entoure – en tout cas le monde *en dehors du vivant*. En effet le vivant est encore principalement hors de portée des explications purement mathématiques et physiques.

L'étude du vivant est une discipline en soi, appelée la *biologie*. Et la science consistant à soigner les êtres humains malades s'appelle la *médecine*.

Nous admirons les mathématiques, mais n'en sommes pas des admirateurs béats. Il y a d'autres domaines du savoir où les mathématiques sont de peu d'utilité pour expliquer les choses : on vient de voir la biologie et la médecine ; il y a aussi la sociologie (= le comportement des êtres humains en société), la politique, l'histoire, le droit, les littératures des grandes civilisations (chinoise, russe, espagnole, anglo-saxonne, française,...), etc.

Pour un esprit un tant soit peu curieux, comme l'est tout enfant qui n'a pas été éteint par une instruction passive et conformiste, consistant en l'ingurgitation de règles, le monde est une caverne d'Ali Baba d'émerveillements qu'une vie ne suffit pas à explorer.

Exercice I.34.4 : Vérifier pour $n = 3,\ 4,\ 5$, la formule

$$1 + 4 + 9 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice I.34.5 : Sachant que la hauteur d'un triangle équilatéral est approximativement 0,866 fois la longueur d'un côté, quelle est approximativement la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral d'aire 1 m^2 ?

Aide : Essayez 1 m. Voyez que c'est trop court. Essayez 2 m. Voyez que c'est trop long. Essayez 1,5 m. Est-ce trop court ou trop long ? Continuez quelques étapes en prenant chaque fois la moyenne du nombre trop court et du nombre trop long.

Exercice I.34.6 : Sachant que la hauteur d'un tétraèdre régulier est approximativement 0,8165 fois la longueur d'une arête, quelle est approximativement la longueur d'une arête d'un tétraèdre régulier de volume 1 m^3 ?

Aide : Suivre la même méthode par approximations successives que dans l'exercice précédent.

Exercice I.34.7 : Montrer que le centre d'un tétraèdre régulier est à un quart de la hauteur joignant une face à un sommet, en partant de la face.

Aide : S'inspirer de l'exercice I.34.3.

Exercice I.34.8 : Soit quatre points dans l'espace avec les coordonnées suivantes (voir fig. I.31.7, p. 231) :

$$A = (0,\ 0,\ 0) \quad (1)$$
$$B = (3,\ 0,\ 0) \quad (2)$$
$$C = (1,\ 3,\ 0) \quad (3)$$
$$D = (2,\ 2,\ 5)$$

Quel est le volume de la pyramide qu'ils forment ?

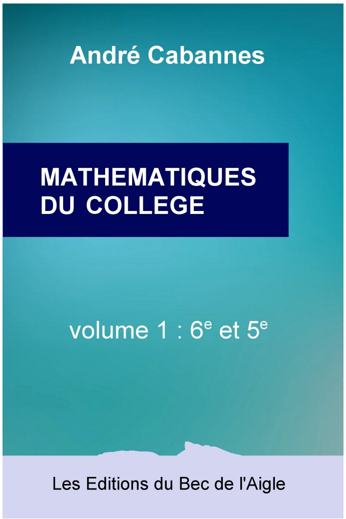
Aide : Montrer qu'on ne change pas le volume en remplaçant le point D par $D' = (0,\ 0,\ 5)$. Remplacer aussi C par un autre point plus commode.

Exercice I.34.9 : Expliquer schématiquement comment on pourrait calculer le volume d'un dodécaèdre régulier (voir fig. I.33.9 et I.33.10) en le divisant en pyramides à base triangulaire.

Quelles données intermédiaires a-t-on besoin de calculer pour obtenir le volume d'un dodécaèdre régulier d'arête 1 mètre.

Catalogue des

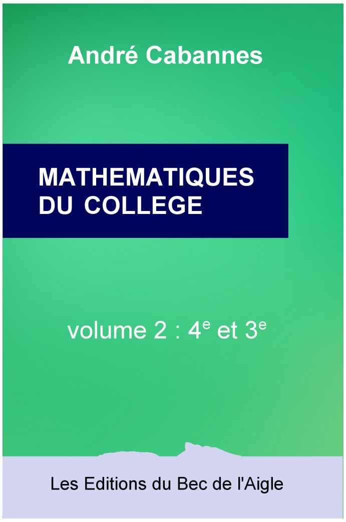
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159
Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

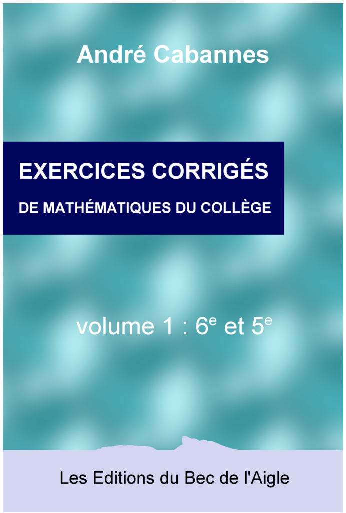
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167
Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

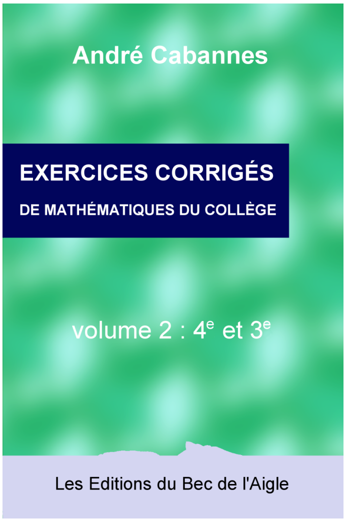
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2958738566

Maths du collège volume 1

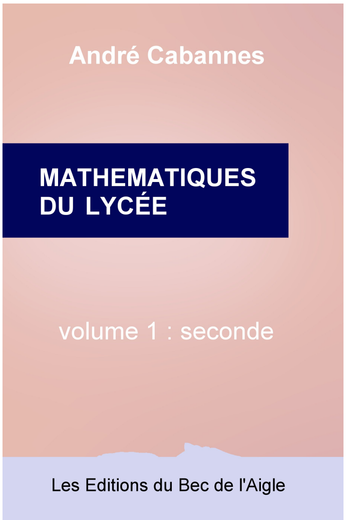
Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574

Maths du collège volume 2

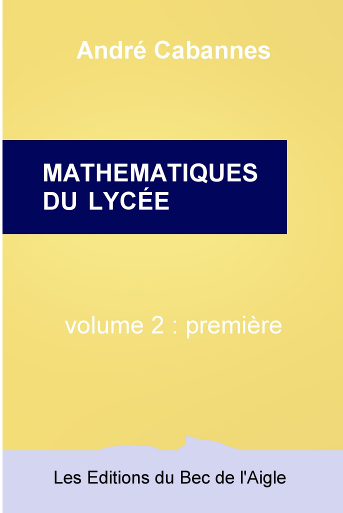
Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2957239183

Cours de mathématiques de seconde

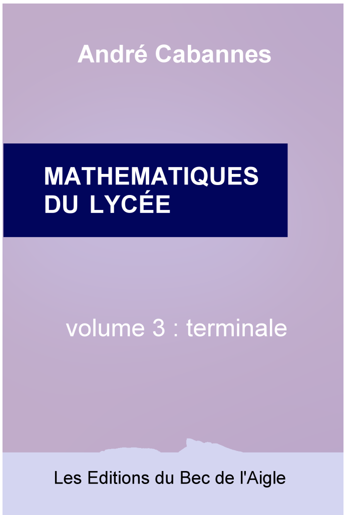
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191

Cours de mathématiques de première

à l'intention des lycéens et de leurs parents



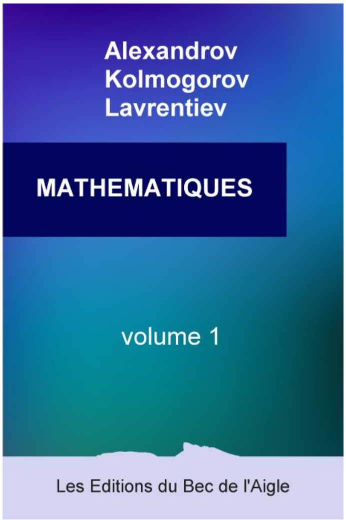
www.amazon.fr/dp/2958738507

Cours de mathématiques de terminale

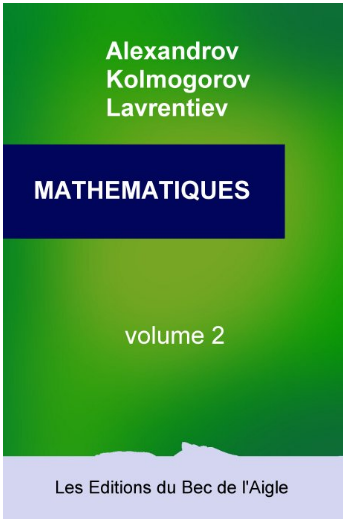
à l'intention des lycéens et de leurs parents

www.amazon.fr/dp/2957239140

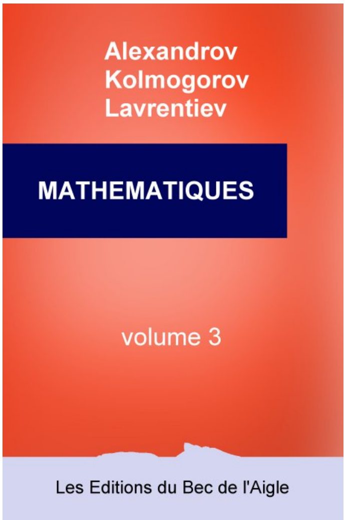
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

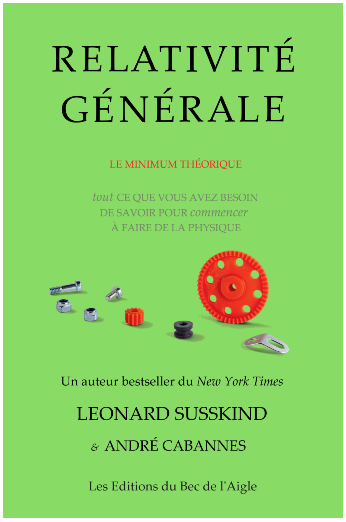


www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132

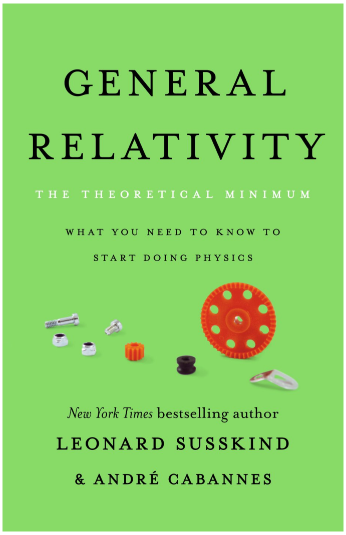
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



www.amazon.fr/dp/2957239175

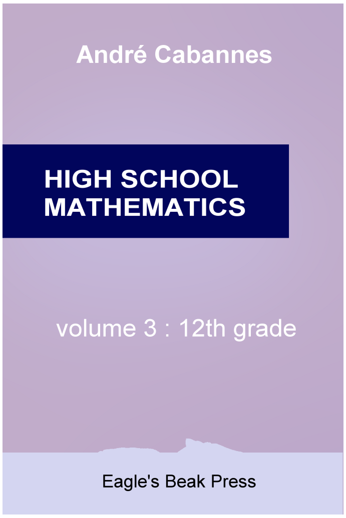
Cours de physique
(niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



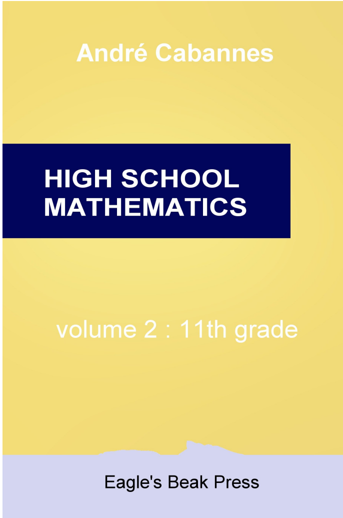
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

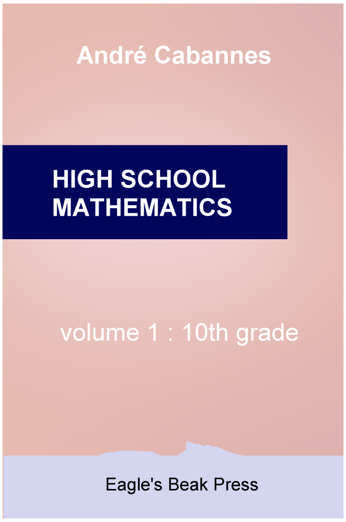
Volume 3 : 12th grade



www.amazon.com/dp/2958738523

High school mathematics

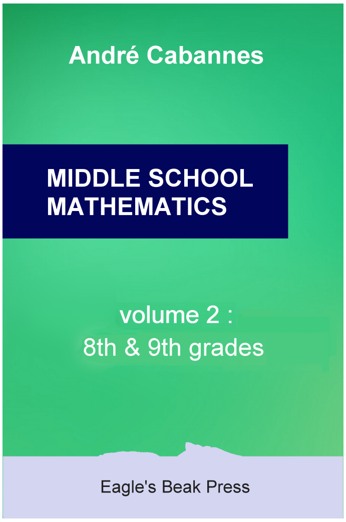
Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531

High school mathematics

Volume 1 : 10th grade

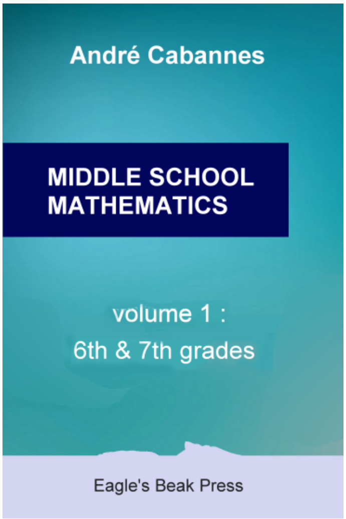


www.amazon.com/dp/295873854X

Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and their parents



www.amazon.com/dp/2958738558

Middle school mathematics

Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and their parents