Leçon 3 :

Exercices avec les suites et les séries

Nous avons vu dans les leçons précédentes que les suites sont importantes à deux égards

1. Elles permettent de comprendre des notions de topologie élémentaire sur les rationnels et les réels, qui éclairent ces deux ensembles.
2. Elles sont indispensables pour introduire les notions fondamentales de continuité de certaines fonctions réelles, et pour calculer aussi, quand elles en ont une, leur fonction dérivée.

Concernant le point n°1, en un mot : les rationnels, comme les réels, sont des ensembles denses. Cependant les rationnels ont des « trous », tandis que les réels n'en ont pas. L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est complet. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne l'est pas. C'est la raison principale pour laquelle l'ensemble de choix pour travailler avec les nombres est l'ensemble des réels. Et pour soutenir l'intuition – pour ceux d'entre nous qui ont une vision géométrique des choses – nous avons la droite des nombres qui représente tous les nombres, des entiers naturels aux réels.

Concernant le point n°2 : les fonctions continues et dérivables sont un outil fondamental en mathématiques et en physique. Pour bien les comprendre, il faut d'abord bien comprendre les suites de nombres.

On a vu qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les suites et les séries. Ce sont deux façons différentes de voir la même question : la convergence ou non d'une collection de nombres vers une limite.

Par exemple, la suite

$$1 \quad 1,5 \quad 1,75 \quad 1,875 \quad 1,9375 \quad 1,96875 \quad \text{etc.} \tag{3.1}$$

et la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+... \tag{3.2}$$

sont deux façons différentes de regarder la même chose.

À notre sens, les séries sont plus commodes pour étudier les problèmes de convergence, car leur construction, qui reste explicite, révèle mieux comment elles vont sans doute se comporter.

C'est tout particulièrement vrai pour les séries entières, qui sont un outil de choix pour étudier certaines fonctions. La forme générale d'une série entière est

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... \tag{3.3}$$

où la variable indépendante est x, et les a_i sont une collection infinie de coefficients.

Pour les utiliser, il faut commencer par comprendre dans quelles conditions concernant les coefficients ainsi que les valeurs de la variable indépendante x elles ont un sens, i.e. elles convergent.

Exercice 3.1 : Montrer, sans calculs laborieux, que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = 1,96875 \tag{3.4}$$

Aide : Utiliser la formule apprise au collège [1] exprimant plus simplement la somme

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \tag{3.5}$$

Nous n'allons plus nous occuper de topologie dans ce cours de première. Nous en reparlerons un peu plus en terminale. Mais ce sera surtout un sujet pour les lecteurs et les lectrices qui poursuivront l'étude des mathématiques après le baccalauréat [2].

Cette leçon 3, plus facile que les deux précédentes, mais tout aussi fondamentale, va être consacrée à des exercices avec les suites et les séries, certains résolus dans le texte de la leçon, d'autres proposés aux lecteurs et aux lectrices pour approfondir et renforcer leur compréhension. Mentionnons-le pour ne plus avoir à le redire : la lecture sérieuse de ce livre inclut de faire *tous les exercices*, et même d'autres qu'on se fabrique soi-même.

1. On l'a vue par exemple dans *Mathématiques du collège, volume 2 : 4e et 3e*, page 239, et même avant.

2. Un bon chapitre d'introduction à la topologie, par Pavel Alexandrov, se trouve dans le livre d'Alexandre Alexandrov, Andreï Kolmogorov, et Mikhaïl Lavrentiev, *Mathématiques*, volume 3, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2021.

Commençons par deux exercices classiques du niveau collège, le premier du début du collège, le second de la fin.

Exercice 3.2 : Montrer que la somme des n premiers entiers naturels positifs est

$$1 + 2 + 3 + ... + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.6}$$

Aide : Voir la démonstration de Carl Friedrich Gauss (1777, 1855) dans exercice I.8.10, page 62, de notre livre *Mathématique du collège, volume 1 : 6e et 5e*, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2022.

Ou bien démontrer la formule (3.6) en utilisant un raisonnement par récurrence (voir exercice suivant pour réviser en quoi consiste un raisonnement par récurrence).

Exercice 3.3 : Montrer que la somme des n premiers carrés d'entiers naturels positifs est

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3.7}$$

Aide : Construire un raisonnement par récurrence.

1. Vérifier que la formule est vraie pour $n = 1$.
2. Supposer que la formule est vraie jusqu'à n et montrer alors qu'elle est encore vraie pour $(n+1)$. Autrement dit, montrer que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \;=\; \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \tag{3.8}$$

   Pour ce faire, commencer par simplifier de part et d'autre par $(n+1)$, et multiplier de part et d'autre par 6. Puis montrer que les deux membres (après simplification et multiplication par 6) sont chacun égal à $2n^2 + 7n + 6$.

Voici un troisième exercice classique du niveau collège :

Exercice 3.4 : Montrer que la somme des inverses des entiers naturels positifs diverge vers plus l'infini. On le note

$$\lim_{n \to +\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \right\} = +\infty \tag{3.9}$$

Les deux résultats ci-dessous sont eux d'un niveau supérieur à la classe de première. Nous les mentionnons pour la culture mathématique :

1. La somme des inverses des nombres premiers diverge vers plus l'infini.
2. La somme des inverses des carrés des nombres entiers positifs converge vers $\frac{\pi^2}{6}$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \right\} = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.10}$$

Ce second résultat s'appelle le « problème de Bâle ». Il a été résolu au XVIIIe siècle par Leonhard Euler (1707, 1783) qui, de même que d'autres personnes qui se sont intéressées à ce problème, était originaire de Bâle. Mais la démonstration d'Euler n'était pas totalement rigoureuse. On peut dire qu'elle était heuristique en quelque sorte. La démonstration impeccable du problème de Bâle fait appel à des résultats avancés de la théorie des séries qui ne furent établis qu'au XIXe siècle.

Suite de Fibonacci

C'est une suite définie par une formule de récurrence après amorçage des deux premiers termes.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = 1$$

puis

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \tag{3.11}$$

Les quinze premiers termes de la suite de Fibonacci sont donnés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Quinze premiers termes de la suite de Fibonacci.

n	u_n
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987

Note historique : Fibonacci (c. 1170, c. 1250), appelé aussi Léonard de Pise, était le fils d'un marchand pisan. Il vécut quelques années à Bougie sur la côte algérienne, où son père faisait des affaires avec les Arabes du Maghreb. Fibonacci y apprit les mathématiques arabes – par exemple l'algèbre d'Al-Khwarizmi –, la représentation des nombres avec la notation positionnelle à base 10, et aussi des éléments de comptabilité en partie double.

Revenu en Italie, il publia en 1202 un livre intitulé *Liber abaci*. Ce livre a une place importante dans l'histoire des mathématiques en Europe. C'est en effet le premier livre à avoir exposé en détail les chiffres arabes et les techniques de calcul avec ces chiffres, qui étaient infiniment plus commodes que les chiffres romains utilisés jusqu'alors pour faire les quatre opérations.

Étant donné que la comptabilité fait un grand usage des opérations arithmétiques (surtout l'addition et la soustraction), il n'est pas surprenant que le livre de Fibonacci ait aussi introduit des premières techniques comptables – en particulier de comptabilité en partie double – apprises auprès des Arabes, qui les avaient apprises eux-mêmes auprès des Indiens [3].

3. Cf. le livre de François Lebon, *Comptabilité générale*, 2021, Les Éditions du Bec de l'Aigle, pour apprendre la comptabilité en partie double.

La suite de Fibonacci évidemment diverge, mais elle a beaucoup de propriétés intéressantes. Étudions-en une. Soit la suite v_n, construite à partir de la suite de Fibonacci u_n de la manière suivante :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{3.12}$$

Alors on a le résultat suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3.12}$$

Autrement dit, la suite des ratios u_{n+1}/u_n converge vers le nombre d'or.

Démonstration :

Avant d'entrer dans la démonstration proprement dite, commençons, comme nous l'avons recommandé, par regarder les premiers termes de la suite v_n pour orienter notre travail ultérieur.

Tableau 3.2 : Vingt premiers termes de la suite v_n.

n	u_n	v_n
0	1	1
1	1	2
2	2	1,5
3	3	1,6666666667
4	5	1,6
5	8	1,625
6	13	1,6153846154
7	21	1,619047619
8	34	1,6176470588
9	55	1,6181818182
10	89	1,6179775281
11	144	1,6180555556
12	233	1,6180257511
13	377	1,6180371353
14	610	1,6180327869
15	987	1,6180344478
16	1597	1,6180338134
17	2584	1,6180340557
18	4181	1,6180339632
19	6765	1,6180339985
20	10946	

Comment se comporte cette suite ? Elle n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. Dessinons-la :

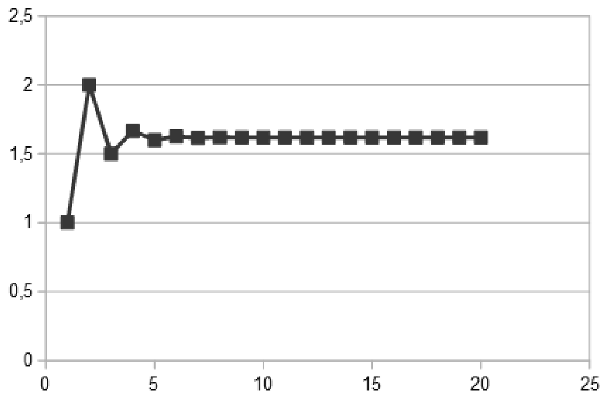


Figure 3.1 : Graphe de la suite des ratios $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On voit sur la figure 3.1 que la suite v_n alterne en prenant des valeurs au-dessus et en dessous d'une limite autour de 1,6. Cela n'est naturellement en aucune manière une démonstration. En revanche cela nous oriente pour démontrer la convergence de v_n.

Il y a plusieurs façons de faire. Une idée qui me vient à l'esprit est de montrer que les termes d'*index pair* de la suite v_n croissent tout en restant bornés. Cela nous permettra d'affirmer, en vertu de la complétude de l'ensemble $\mathbb{R}$, que cette suite des termes pairs converge vers une limite. Ensuite nous montrerons que la limite des termes pairs est $(1+\sqrt{5})/2$. Enfin nous ferons un travail analogue sur les termes impairs.

Démarrons en observant que $v_0 = 1$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \\ v_{n+2} &= \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} \end{aligned}$$

On peut réécrire v_{n+2} comme ceci :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \frac{u_{n+2}+u_{n+1}}{u_{n+2}} \\ &= 1+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \\ &= 1+\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+u_n} \\ &= 1+\frac{1}{\frac{u_{n+1}+u_n}{u_{n+1}}} \\ &= 1+\frac{1}{1+\frac{u_n}{u_{n+1}}} \\ &= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{v_n}} \end{aligned}$$

Soit encore

$$v_{n+2} = \frac{2v_n+1}{v_n+1} \tag{3.13}$$

Vérifions nos calculs. Étant donné que $v_0 = 1$, cela donne

$$v_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

$$v_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1,5}} = 1 + \frac{1,5}{2,5} = \frac{4}{2,5} = 1,6$$

Tout va bien.

Passons à la démonstration que v_n croît pour les index pairs et décroît pour les index impairs. Comme l'indique la formule (3.13), le terme v_{n+2} est obtenu à partir de v_n en appliquant à v_n la fonction

$$y = \frac{2x+1}{x+1} \tag{3.14}$$

Essayons de comprendre pourquoi quand on démarre avec $x = 1$, on va obtenir une suite croissante. Mais quand on démarre avec $x = 2$ on va obtenir une suite décroissante.

Les graphes conjoints des deux courbes $y = \frac{2x+1}{x+1}$ et $y = x$ révèlent le pot aux roses.

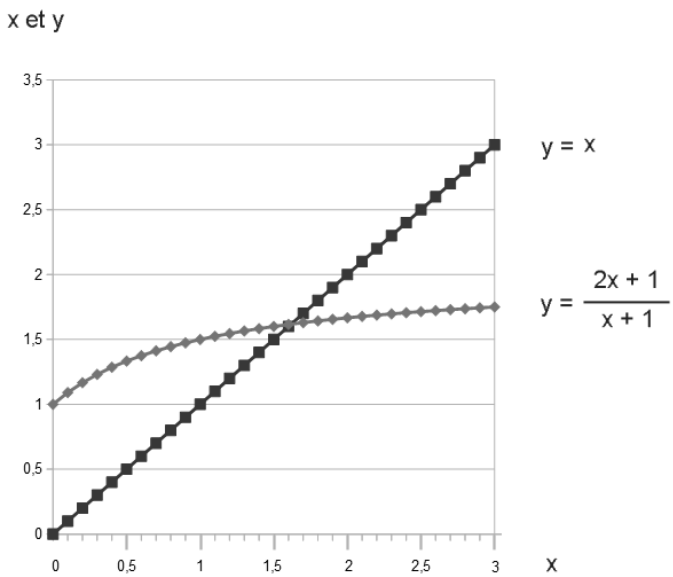


Figure 3.2 : Graphes conjoints de $y = \frac{2x+1}{x+1}$ et $y = x$.

Tant que x est en dessous du point de croisement des deux courbes, y est plus grand que x, et y reste en dessous du point de croisement. Quand x est au-dessus du point de croisement, y est plus petit que x, mais reste au-dessus du point de croisement.

Quelle est l'abscisse du point de croisement (qui est aussi son ordonnée) ?

Il faut résoudre l'équation

$$x = \frac{2x+1}{x+1} \tag{3.15}$$

Nous laissons à la lectrice et au lecteur le soin de montrer que le croisement est au point de coordonnées $x = y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre, qui s'appelle le nombre d'or, est généralement noté avec le symbole ϕ.

Pour que notre démonstration soit mathématiquement complète, il faut démontrer logiquement, et pas seulement montrer sur la figure 3.2, que quand $x < \phi$, on a $x < y < \phi$. Et quand $\phi < x$, on a $\phi < y < x$. Nous le laissons aussi en exercice.

Pour conclure, la suite des v_n d'index pair croît et est bornée. (Elle est bornée en particulier par l'abscisse du point de croisement.) Donc elle converge vers une limite l. Un peu d'epsilonite, comme nous avons fait page 27 montre que cette limite satisfait forcément l'équation permettant de passer de v_n à v_{n+2}. C'est précisément l'équation (3.15). Donc la limite de la suite de termes pairs de v_n est le nombre d'or. Sa valeur avec quelques décimales est

$$\phi = 1,61803... \tag{3.16}$$

De même, les termes d'index impair de v_n décroissent et sont bornés par en dessous. Donc ils ont une limite, et cette limite est aussi ϕ.

C.Q.F.D.

La démonstration que nous venons de donner ne prétend ni être la seule, ni être la plus élégante. En revanche elle veut illustrer comment, face à un problème, on réfléchit, on choisit une voie d'approche, on sort sa boîte à outils, et on s'attaque vaillamment au problème. Parfois ça marche ; parfois ça ne marche pas, et il faut essayer une autre voie. Ici ça a marché.

Faire des maths, ce n'est pas se rappeler l'astuce pour résoudre le problème, comme c'est encore trop souvent le cas pour les élèves des classes préparatoires en France. Nous ne cherchons pas à former des « bêtes à concours » qui décrocheront des places dans les meilleures écoles. Nous cherchons à former de futurs mathématiciens, physiciens et ingénieurs qui seront confrontés à des problèmes mathématiques, et auront développé une méthodologie.

Notons aussi que certains manuels de bachotage des maths de 1ère, en 2024, présentent uniquement des exercices qui nous paraissent du niveau 6e. Les élèves qui ne sont formés qu'avec ces livres, et des cours correspondants, auront peut-être 20/20 à la plupart des examens, et la mention TB au bac, mais ils ne rentreront pas dans les meilleures écoles d'ingénieurs, car – en dépit de ce qu'on vient de dire sur l'excès de mémorisation d'astuces en maths spé aux dépens d'une méthodologie – rentrer dans une bonne école d'ingénieur ou décrocher un mastère en maths demande plus d'efforts et un meilleur niveau que les manuels de 1ère qui présentent une litanie d'exercices du niveau début du collège [4].

4. Par exemple : soit une suite arithmétique u_n de raison 7. En partant de u_0, un nombre positif plus petit que 10, nous sommes arrivés à $u_n = 61$. Quel est u_0 ? Et pour quel index n a-t-on atteint $u_n = 61$?

Pour faire une pause après l'étude de la suite de Fibonacci, regardons à nouveau le problème de Bâle, formule (3.10), mais en laissant un ordinateur travailler pour nous et nous montrer des choses. Autrement dit, faisons un peu de « mathématiques expérimentales ».

Exercice 3.5 : Clairement la suite des sommes partielles des inverses des carrés des nombres entiers positifs est croissante. On nous dit qu'elle a une limite, qui est $\pi^2/6$. Nous n'allons pas le démontrer [5]. Mais on veut savoir si elle converge raisonnablement vite.

Jusqu'à quel index n faut-il aller pour que la racine carrée de six fois la somme partielle

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \tag{3.17}$$

dépasse le nombre 3,14 ?

Aide : Vous devez trouver qu'il faut aller jusqu'à près de $n = 600$.

Théorème de Thalès revisité et étendu aux nombres irrationnels

Pour terminer cette leçon appliquée sur les suites, les séries, et la convergence, démontrons le théorème de Thalès pour un ratio irrationnel.

Soit un triangle ABC. On se rappelle qu'on a démontré le théorème de Thalès quand on place un point E sur AB à une distance p/q fois AB de A, et un point F sur AC à une distance p/q fois AC de A.

Alors on a EF parallèle à BC et de longueur égale à p/q fois BC.

Mais on n'a pas démontré le théorème de Thalès quand au lieu d'un nombre rationnel p/q, on fait la même construction avec un nombre irrationnel positif λ.

5. Avec un peu de calcul intégral élémentaire – qu'on apprendra l'année prochaine – il est facile de montrer que la suite (3.17) est bornée. Donc elle a une limite. En revanche, montrer que cette limite est $\pi^2/6$ est plus ardu.

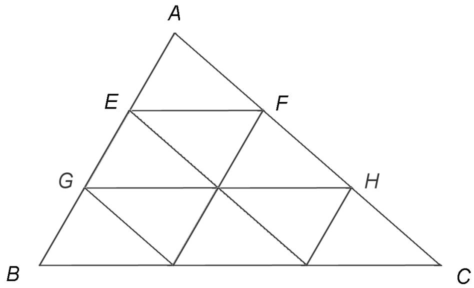


Figure 3.3 : Théorème de Thalès quand on utilise un nombre rationnel pour découper AB et AC. (Sur la figure on a utilisé 1/3.)

Que se passe-t-il si on utilise un découpage avec un nombre irrationnel λ ?

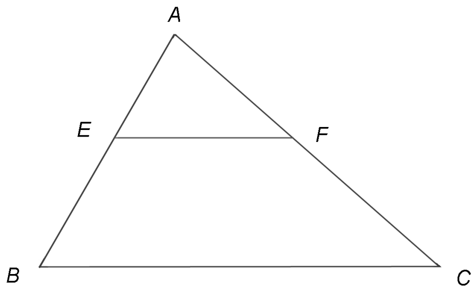


Figure 3.4 : Étude du cas où $AE/AB = AF/AC = \lambda$, et lambda est irrationnel.

On peut encadrer λ aussi précisément qu'on veut entre p/q et $(p+1)/q$. Cela nous permet de positionner deux points E_1 et E_2 encadrant E sur le segment AB. On fait de même avec F_1 et F_2 sur le segment AC.

Les points E_1, E_2, F_1 et F_2 définissent une bande horizontale. Le segment EF (qui a priori pourrait être légèrement incliné) est contenu dans cette bande. Étant donné qu'on peut prendre une bande aussi fine qu'on veut, ce n'est possible que si EF est horizontal.

D'autre part, EF a une longueur intermédiaire entre celle de E_1F_1 et celle de E_2F_2. On peut rendre ces deux longueurs aussi proches que l'on veut de λ fois BC. Donc la seule longueur possible pour EF est λ fois BC.

C.Q.F.D.

Le théorème de Thalès était évident pour des découpages rationnels. Voilà comment on l'étend aux découpages irrationnels. Cela montre la puissance des raisonnements utilisant le concept de convergence.

Suggestions de lecture

SCHÄRLIG Alain, *Du zéro à la virgule : les chiffres arabes à la conquête de l'Europe 1143-1585*, PPUR, 2010.

Leçon 4 :

Fonctions continues

Pour bien comprendre l'importance des fonctions continues en mathématiques et en physique, il est utile de rappeler à grands traits l'histoire du développement des mathématiques. Cette histoire peut être découpée en quatre périodes :

1. Des Égyptiens et Babyloniens jusqu'à Euclide (-300) : *mathématiques de l'Antiquité* ; accumulation de faits et règles en géométrie élémentaire et en arithmétique sans grande organisation ni vue d'ensemble ; néanmoins, à la fin de cette période, Euclide écrit son livre *Éléments* qui expose la géométrie de manière axiomatique. Les mathématiques qu'on apprend à l'école primaire, et qui servent dans la vie de tous les jours, font partie de cette période.
2. D'Euclide à Descartes (1596, 1650) : *mathématiques des quantités constantes*. Dans cette longue période, on peut distinguer plusieurs parties :
   - D'abord, à la fin de l'Antiquité grecque, la merveilleuse école d'Alexandrie (de -300 à +400) qui compta, outre Euclide, Ératosthène (c. -276, c. -194), Héron (premier siècle de notre ère), Diophante, Pappus, Hypatie, etc.
   - Mathématiques du Moyen-Orient (Indiens, Perses, Arabes) : numération, trigonométrie, algèbre. Cette période s'étend entre +500 et +1500. Les mathématiques de cette période, et même une bonne partie de celles de l'Antiquité, ont été transmises à l'Europe par les Arabes. Cette transmission a contribué à la renaissance intellectuelle de l'Europe qui s'était éteinte, sur le plan scientifique, et sur à peu près tous les autres plans, après la chute de l'Empire romain d'Occident. C'est l'Église catholique qui avait pris le relai du monde gréco-romain dans le maintien d'une activité spirituelle, mais elle n'était pas tournée vers les sciences. C'est une vaste et passionnante histoire à laquelle une description en quelques lignes ne fait pas justice.

- Début des mathématiques européennes : progrès importants en algèbre par les Italiens au XVIe siècle, découverte des nombres complexes, mathématiques de la cosmographie – qui avaient démarré au vrai dès le début de l'ère chrétienne avec Claude Ptolémée (c. +100, c. +168) mais qui ont connu une révolution avec Nicolas Copernic (1473, 1543) puis Johannes Kepler (1571, 1630) – et de la cartographie, géométrie analytique de Descartes, etc.

3. De Descartes au début du XIXe siècle : *mathématiques des quantités variables*. C'est la période du triomphe des mathématiques européennes. Introduction des fonctions, du calcul différentiel et intégral, applications des mathématiques à la physique avec des succès extraordinaires, mécanique des fluides, électromagnétisme, etc. Là encore cette histoire vaste et passionnante demande des volumes pour être embrassée.
4. Du début du XIXe siècle à nos jours : *mathématiques contemporaines*. Elles commencent par un approfondissement et une consolidation des concepts de base en calcul différentiel et intégral. C'est le travail de notre ami Cauchy qui définit clairement, comme on l'a vu, la notion de convergence et de limite [6]. Puis vinrent la géométrie non euclidienne, la théorie des ensembles, la théorie des structures algébriques, et d'autres domaines, que le lecteur et la lectrice découvriront s'ils continuent à faire des maths après le baccalauréat [7].

Les fonctions sont le concept fondamental de la période des mathématiques des quantités variables. Parmi les fonctions, les fonctions continues – et en particulier celles dérivables, que nous verrons dans la leçon suivante – sont les plus importantes.

Il faut bien comprendre que l'idée de faire des mathématiques avec les fonctions représente un saut conceptuel considérable par rapport aux mathématiques précédentes. Depuis les Grecs jusqu'à la fin du XVIe siècle en Europe, les mathématiques portaient sur des choses « concrètes ». Celles-ci étaient explicites ou pas dans les travaux des mathématiciens, mais elles étaient toujours implicites :

---

6. Cauchy mériterait déjà sa place au panthéon des mathématiciens pour ce travail, mais ses travaux les plus importants portent sur les fonctions et l'analyse complexe qu'il développa au départ essentiellement seul.

7. L'ouvrage en trois volumes, par Alexandrov, Kolmogorov et Lavrentiev, *Mathématiques*, Les Éditions de Bec de l'Aigle, 2020/21, proposent une introduction claire, pédagogique, efficace, dégagée de tout pédantisme (et fuyant Bourbaki comme la peste), aux mathématiques des périodes 3 et 4 ci-dessus.

c'était des nombres, des quantités constantes (éventuellement inconnues qu'il fallait trouver), des points et figures géométriques.

L'idée qu'une *fonction*, c'est-à-dire une relation entre deux variables, pût être un être mathématique en soi, qu'on pouvait appeler f, et sur lequel on pouvait travailler, était étranger à l'esprit grec. L'idée que toute une fonction pût être l'inconnue dans une devinette était inconcevable avant le XVIIIe siècle.

L'histoire de l'émergence du concept de fonction au XVIIe siècle est très intéressante. Mentionnons des jalons importants.

On a vu que dès la Haute Antiquité les mathématiciens s'intéressaient aux équations. Au deuxième millénaire avant J.-C., les Babyloniens posaient déjà des problèmes comme celui-ci (mis sous forme moderne) [8] : trouver le nombre x tel que $x^2 + x = 3/4$. Et ils donnaient la réponse – avec sa formule ! Ils considéraient qu'il n'y avait qu'une solution, car ils éliminaient celle négative.

Exercice 4.1 : Résoudre algébriquement l'équation

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \tag{4.1}$$

Tracer la courbe $y = x^2 + x - 3/4$.

On a vu qu'Al-Khwarizmi, au IXe siècle de notre ère, a inventé l'algèbre pour résoudre toutes sortes d'équations.

Les Italiens du XVIe siècle (Del Ferro, Tartaglia, Ferrari) ont trouvé les solutions générales aux équations polynomiales à une variable de troisième et quatrième degré.

Exercice 4.2 : Résoudre géométriquement l'équation

$$x^3 + x^2 = \frac{3}{4} \tag{4.2}$$

Combien y a-t-il de solutions réelles ?

Expliquer pourquoi une équation polynomiale à une inconnue du troisième degré a toujours au moins une solution réelle.

8. Voir notre livre, *Mathématiques du lycée, volume 1 : seconde*, page 22.

Fin XVIe, les mathématiciens s'intéressaient aussi aux équations faisant intervenir *deux inconnues*, x et y. Ils savaient qu'en général pour déterminer la valeur de chaque inconnue il fallait qu'on ait deux équations, c'est-à-dire deux contraintes.

Si je vous dis par exemple que Julie a deux fois l'âge d'Élodie, et dans trois ans elle n'aura plus qu'une fois et demie l'âge d'Élodie, vous pouvez déterminer l'âge de Julie et l'âge d'Élodie aujourd'hui.

Exercice 4.3 : Quels sont les âges de Julie et Élodie aujourd'hui ?

Mais si je vous dis simplement que dans un an Robert aura l'âge qu'aura Cécile au carré, et que dans ce problème on ne considère pas des nombres entiers d'années, mais que les inconnues sont des nombres réels mesurant des durées, vous ne pouvez pas déterminer l'âge de Robert et l'âge de Cécile. Si on appelle y l'âge de Robert aujourd'hui, et x l'âge de Cécile, on peut transformer notre problème en l'équation

$$(x+1)^2 = y + 1 \tag{4.3}$$

Comme on ne peut pas résoudre cette équation, jusque vers 1620 les mathématiciens considéraient simplement qu'elle n'avait pas d'intérêt.

René Descartes porta un regard différent sur la question. Il dit

– Non, non, l'équation (4.3) est très intéressante ! Certes, on ne peut pas la « résoudre », c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver x et y. Mais l'équation (4.3) établit une *relation* entre x et y [9].

Descartes, comme on sait, a créé les repères cartésiens, et la géométrie analytique. Pour les repères cartésiens, il s'est inspiré des cartographes qui depuis déjà un siècle repéraient les points sur le globe terrestre à l'aide de la latitude et la longitude. D'autres mathématiciens, comme Pierre de Fermat (c. 1605, 1665), ont contribué à la naissance de la géométrie analytique. Mais c'est Descartes qui a réellement montré et commencé à exploiter sa pleine puissance.

Descartes a donc « représenté » la relation (4.3) comme le montre la figure 4.1.

9. Le mot *fonction* a été introduit un peu plus tard par Gottfried Leibniz. Et il a un sens un peu moins général que « relation ».

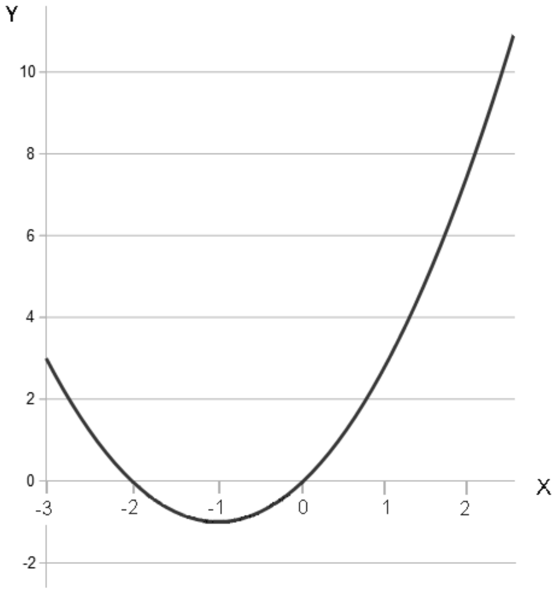


Figure 4.1 : Graphe de la relation $y = (x+1)^2 - 1$.

Et Descartes a expliqué que les problèmes algébriques pouvaient se transformer en problèmes géométriques, et réciproquement.

Exercice 4.4 : Résoudre géométriquement le problème suivant. Trouver les valeurs de x et de y satisfaisant les deux équations :

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y+1 \\ x+4 &= \frac{2}{3}y \end{aligned} \tag{4.4}$$

Les relations où à chaque x correspond un seul y s'appellent des fonctions. Mais le concept de relation telle que l'a introduit Descartes est plus vaste.

Exercice 4.5 : Tracer le lieu de l'ensemble des points de coordonnées $(x,\ y)$ satisfaisant la contrainte :

$$2x^2 + y^2 - xy + 3x + y - 7 = 0 \tag{4.5}$$

À quelle famille cette courbe appartient-elle ?

Expliquer pourquoi ce n'est pas le graphe d'une fonction.

Pourquoi le concept de fonction est devenu fondamental au XVIIe siècle

C'est lié à l'histoire du monde. Après la désastreuse scolastique du XIIIe siècle, l'Europe a recommencé à penser. Et elle l'a fait d'une manière nouvelle : en *regardant la nature* avant d'en donner des explications [10].

Un goût pour la connaissance objective [11] est réapparu, qui avait existé à l'époque des présocratiques puis avait disparu pendant deux mille ans, cédant la place à des considérations ou des affirmations péremptoires sur l'homme, la raison de son existence, sa prééminence dans l'univers, la façon dont Dieu voulait qu'on vive sur terre avant la vraie vie dans l'Au-delà, etc.

Après quelques voyageurs intrépides comme Guillaume de Rubrouck (c. 1220, c. 1290), Marco Polo (1254, 1324) ou Ibn Battuta (1304, 1368), au XVe siècle les Portugais se lancèrent dans des expéditions maritimes lointaines le long des côtes de l'Afrique occidentale. À la fin du XVe siècle on était allé en Amérique, on avait fait le tour de l'Afrique pour aller jusqu'en Inde par la mer. Et l'Europe commençait à dominer le monde [12].

La navigation hauturière nécessitait de mieux connaître le mouvement des étoiles, car c'était les seuls points disponibles, quand

10. Cela évitait des penseurs de l'Antiquité, comme Aristote (-384, -322) qui expliquait que les objets les plus lourds tombaient les plus vite, qu'il fallait constamment pousser un objet pour qu'il avance, que les astres parcouraient des cercles dans le ciel, que l'on pouvait remplir l'espace avec des tétraèdres réguliers comme on peut paver le plan avec des triangles équilatéraux, etc.

11. En épistémologie, le concept de « connaissance objective » est *très glissant*. Mais nous n'allons pas aborder cette question ici.

12. Avant les grands navigateurs européens, les Chinois avaient monté des voyages dans l'océan Indien, dirigés par l'amiral Zheng He (1371, 1433), avec des navires bien plus grands et des escadres bien plus nombreuses que celles de Christophe Colomb ou Vasco de Gama. Mais le quatrième empereur de la dynastie des Ming y avait brutalement mis fin.

on était loin des côtes, pour se repérer en mer (et aussi dans le désert du Sahara). Ainsi les mathématiciens et les savants du XVIe siècle furent-ils mis à contribution. Ils développèrent des outils nouveaux en géométrie dans l'espace et sur la sphère. Ils comprirent aussi l'importance des *fonctions du temps*, c'est-à-dire où la variable indépendante est le temps, et la ou les variables dépendantes décrivent une position quelque part.

Au début du XVIIe siècle, Kepler formula ses trois lois décrivant le mouvement des planètes autour du soleil. Galilée (1564, 1642) étudia le mouvement d'un corps en chute libre, ou glissant ou roulant sur un plan incliné (pour que ça n'aille pas trop vite). Il découvrit parmi d'autres choses que tous les corps sur lesquels la résistance de l'air est négligeable tombent à la même vitesse[13]. Enfin Newton développa la théorie de la dynamique et la théorie de la gravitation universelle, ce qui lui permit de démontrer par le calcul les lois que Kepler avait trouvées par l'examen minutieux de données astronomiques rassemblées par Tycho Brahé (1546, 1601)

Bref, l'étude des fonctions était lancée. Et elles étaient très rapidement devenues un outil fondamental des mathématiques.

Fonctions continues

La très grande majorité des fonctions avec lesquelles travaillent les mathématiciens et les physiciens sont continues, c'est-à-dire qu'on peut dessiner leur graphe sans lever le crayon de la feuille de papier.

Longtemps cette définition suffit. Mais au début du XIXe siècle, ce n'était plus le cas. Il fallait donner une définition plus précise de ce qu'on entend par une fonction continue. Des gens comme le mathématicien germano-italo-tchèque Bernard Bolzano (1781, 1848) avaient commencé à comprendre que la droite des réels était plus compliquée qu'il n'y paraissait. On savait depuis les Grecs qu'il y avait des irrationnels, mais on avait besoin d'une définition plus précise des irrationnels que « ce sont les nombres qui ne sont pas des fractions ». (D'une manière générale, une définition qui dit ce qu'une chose n'est pas, est un peu insuffisante pour comprendre ce que la chose est :-)

C'est Cauchy qui a fourni la définition de ce qu'est une fonction continue. Et il l'a fait, de manière a priori un peu étonnante, non

13. Cela s'explique bien, car un corps lourd qui se fragmente en deux en l'air ne ralentit pas soudainement. Mais c'est encore mieux de le vérifier expérimentalement. Voir la chute conjointe d'une plume et d'un marteau sur la lune `https://www.youtube.com/watch?v=KDp1tiUsZw8`

pas en décrivant le comportement global de la fonction sur un segment, mais en précisant comment elle doit se comporter en chaque point du segment sur lequel elle est continue. Autrement dit, la continuité se définit d'abord en un point.

Définition : *Une fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *est continue en un point* c *donné*[14], *si pour toute suite* x_n *de nombres ayant pour limite* c, *la suite* $f(x_n)$ *a pour limite* $f(c)$.

Ensuite, par définition, une fonction f *est continue sur un segment* $[a,\ b]$ *si elle est continue en tous les points de* $[a,\ b]$.

On conçoit bien intuitivement qu'on peut dessiner le graphe d'une telle fonction sur le segment $[a,\ b]$ sans lever le crayon. En revanche, si à une certaine abscisse d la fonction fait un saut brusque, en ordonnée, d'une valeur vers une autre, il faudra lever le crayon.

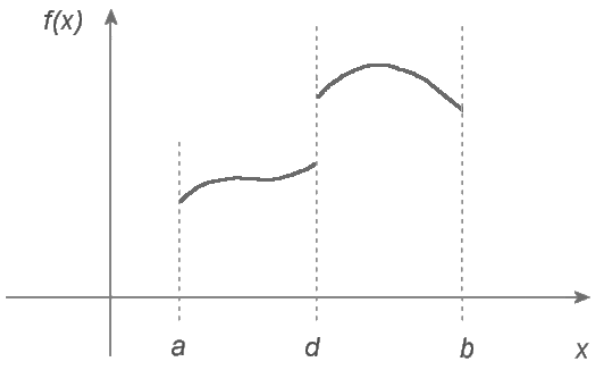


Figure 4.2 : Fonction continue sur le segment $[a,\ b]$, sauf au point d. Noter qu'on n'a pas donné sur ce graphe la valeur de la fonction à l'abscisse d. Et que le segment $a\ b$ soit fermé ou ouvert n'a pour l'instant pas d'importance (ça en aura par la suite).

Ces remarques restent toutefois du domaine de l'intuition. On va préciser tout cela – ce qui nous amènera à nouveau, violant légèrement notre promesse de la leçon précédente (page 30), à reparler un peu de topologie. Nous mentionnerons même en fin de leçon quelques spécimens de fonctions tératologiques, que les mathématiciens conservent sur leurs étagères dans des bocaux de formol.

14. C'est-à-dire en un nombre réel c donné que peut prendre la variable indépendante, sur l'axe des abscisses, dans le domaine de définition de la fonction.

Exemples

Exemple 1 : L'équation $f(x) = ax + b$ définit une fonction continue.

En effet, si x_n est une suite de nombres convergeant vers l, la suite correspondante des $f(x_n)$ tend vers $al + b$.

Démontrons-le complètement à l'aide d'un peu d'« epsilonite ». On veut montrer que

$$\forall \epsilon,\ \exists N \text{ tel que } n > N \Longrightarrow |f(x_n) - f(l)| < \epsilon$$

Utilisons le fait que x_n converge vers l. Cela se traduit par

$$\forall \eta,\ \exists M \text{ tel que } n > M \Longrightarrow |x_n - l| < \eta$$

Prenons $\eta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$. Alors en allant suffisamment loin dans les index n, on est sûr qu'on aura, pour tous les n supérieurs à un M donné (dépendant de η),

$$|x_n - l| < \frac{\epsilon}{|a|} \tag{4.6}$$

Cette inéquation est équivalente à

$$|a|\ |x_n - l| < \epsilon$$

ou encore

$$|ax_n - al| < \epsilon \tag{4.7}$$

Autrement dit, on vient de démontrer que quel que soit le nombre positif ϵ aussi petit soit-il, en allant suffisamment loin dans les index, on aura $f(x_n)$ à une distance de $f(l)$ plus petite que ϵ. Avec le symbolisme de l'epsilonite, cela se note

$$\forall \epsilon,\ \exists M \text{ tel que } n > M \Longrightarrow |f(x_n) - f(l)| < \epsilon$$

C.Q.F.D.

Noter qu'on vient juste de montrer qu'une droite est une courbe continue. Mais cette dernière assertion est informelle, tandis que notre démonstration avec des ϵ et des η est rigoureuse.

Exemple 2 : L'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$ définit une fonction continue.

On veut montrer que si x_n est une suite de nombres convergeant vers l, alors la suite correspondante des $f(x_n)$ tend vers $al^2 + bl + c$.

On va à nouveau partir du fait que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l \tag{4.8}$$

C'est-à-dire : $\forall \eta$, $\exists M$ tel que $n > M \Longrightarrow |x_n - l| < \eta$

Il y a différentes voies possibles pour arriver à

$$\forall \epsilon,\ \exists N \text{ tel que } n > N \Longrightarrow |(ax_n^2 + bx_n + c) - (al^2 + bl + c)| < \eta$$

ou, plus simplement,

$$\forall \epsilon,\ \exists N \text{ tel que } n > N \Longrightarrow |ax_n^2 + bx_n - al^2 + bl| < \eta$$

Pour commencer, notons que

$$|ax_n^2 + bx_n - al^2 + bl| \ \leq \ |ax_n^2 - al^2| + |bx_n - bl| \tag{4.9}$$

On sait déjà qu'en allant suffisamment loin en n, le deuxième terme du membre de droite peut être rendu aussi petit que l'on veut. Il suffit donc de montrer que c'est aussi le cas de $|ax_n^2 - al^2|$.

Écrivons x_n sous la forme $x_n = l + \eta_n$. Alors

$$x_n^2 = l^2 + 2l\eta_n + \eta_n^2 \tag{4.10}$$

Vu que l est un nombre réel donné (ce n'est pas un « nombre infini »), en allant suffisamment loin avec l'index n on peut rendre la différence entre x_n^2 et l^2 aussi petite que l'on veut en valeur absolue. Et c'est vrai aussi pour ax_n^2.

Alors une fois choisi ϵ aussi petit que l'on veut, prenons un index n suffisamment grand pour que d'une part $|bx_n - bl| < \epsilon/2$ et d'autre part $|ax_n^2 - al^2| < \epsilon/2$. On sait que c'est possible pour $n > M$ suffisamment grand. Alors le membre de droite de (4.9) sera plus petit que ϵ.

Voilà qui achève la démonstration de

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} ax_n^2 + bx + c = al^2 + bl + c$$

C.Q.F.D

Cette fois-ci, nous venons de montrer qu'une parabole est une courbe continue.

Exercice 4.5 : Sans rentrer dans toute l'epsilonite, expliquer les points clés de la démonstration qu'une fonction polynomiale de degré n est une fonction continue.

On peut démontrer de même que les fonctions trigonométriques, $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur tout $\mathbb{R}$. On se rappelle que la seconde est simplement la première décalée de $\pi/2$ vers les x plus petits, c'est-à-dire

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

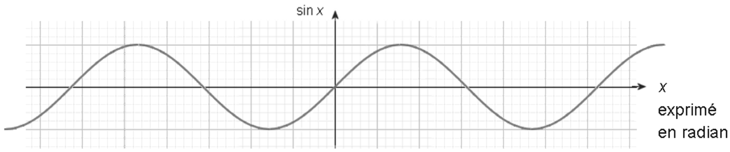


Figure 4.3 : Fonction sinus.

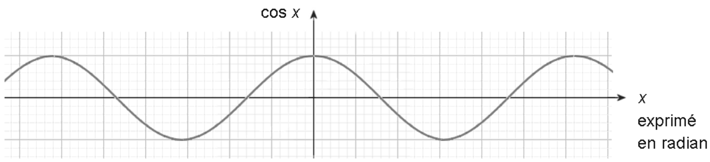


Figure 4.4 : Fonction cosinus.

La démonstration rigoureuse de la continuité de la fonction $\sin x$, avec de l'epsilonite, s'appuie sur la définition géométrique du sinus d'un angle. Mais, sans être compliquée, elle n'apporterait pas d'éclairage intéressant, et nous n'allons pas la faire. Contentons-nous d'observer que les graphes peuvent être dessinés sans lever le crayon.

Le cas de la fonction $\tan x$ présente une particularité. La fonction tangente est continue sur tout $\mathbb{R}$ sauf en les points

$$\ldots \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \ldots$$

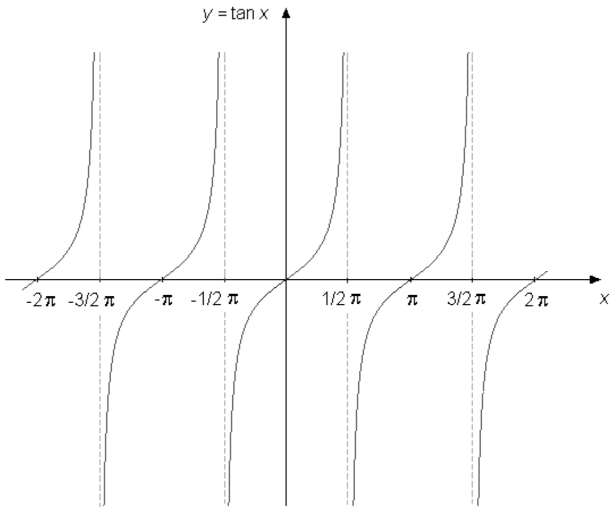


Figure 4.5 : Fonction tangente.

Quand la variable indépendante x (c'est-à-dire l'angle x) s'approche de $\pi/2$ sa tangente devient infinie, car

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{4.11}$$

Et, comme on sait, cette formule n'est valable que si $\cos x \neq 0$. Si vous avez besoin de vous rafraîchir les idées sur les fonctions trigonométriques, vous pouvez vous reporter à notre livre *Mathématiques du lycée, volume 1 : seconde.*

En mathématiques un peu plus avancées que la classe de première, on ne définit plus les fonctions trigonométriques à l'aide de constructions géométriques, mais à l'aide de séries entières. Ainsi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \tag{4.12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \tag{4.13}$$

La fonction tangente a aussi une série entière, où les coefficients ont une expression un peu plus compliquée que dans les formules (4.12) et (4.13).

Alors on peut démontrer la continuité de sinus, cosinus et tangente de x à l'aide de l'outil que sont ces séries entières. On pourra même calculer les fonctions dérivées simplement – *après* avoir étudié dans quelles conditions on peut calculer la dérivée d'une série entière en la dérivant terme à terme. Ce sont des sujets pour plus tard. Nous commencerons à les aborder dans la leçon suivante.

Pour conclure ces exemples : la plupart des fonctions avec lesquelles travaillent les mathématiciens et les physiciens sont continues partout, sauf parfois en quelques points, comme la fonction tangente.

Théorème de la valeur intermédiaire

Soit une fonction $f(x)$ continue sur un segment $[a,\ b]$ des réels, alors si $f(a)$ est négatif et $f(b)$ est positif, il existe au moins un point c situé entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Intuitivement c'est évident, voir la figure 4.6.

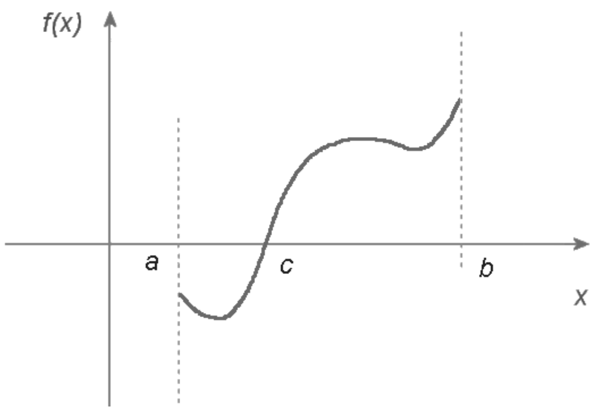


Figure 4.6 : Une fonction continue sur $[a,\ b]$, négative en a et positive en b coupe forcément l'axe des x en au moins un point c entre a et b.

Mais ce n'est pas une démonstration :-)

Démonstration du théorème de la valeur intermédiaire :

Soit une fonction f continue sur $[a,\ b]$. Commençons par noter que si $f(d)$ est strictement positif, alors c'est vrai aussi dans un voisinage (peut-être très étroit, mais non nul) autour de d. C'est vrai aussi à gauche de b et à droite de a.

Considérons maintenant l'ensemble des points x sur le segment $[a,\ b]$ où $f(x) < 0$. Cet ensemble est borné supérieurement pas b.

Alors, en vertu du fait que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est complet, il a donc une plus petite borne supérieure. Appelons-la c.

Il est laissé au lecteur et à la lectrice le soin de montrer pourquoi $f(c)$ ne peut avoir d'autre valeur que zéro.

C.Q.F.D.

Le fait qu'on travaille dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels a joué un rôle fondamental. Si on avait travaillé seulement dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, notre démonstration n'aurait pas été valide. Et de fait, le théorème de la valeur intermédiaire n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$, c'est encore une conséquence du fait que les rationnels ont beau être denses, ils ont des trous. Et la courbe de la figure 4.6 pourrait se faufiler par un trou dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple, sur le segment $[0,\ 2]$ *dans l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des rationnels*, la fonction

$$f(x) = x^2 - 2 \tag{4.14}$$

ne satisfait pas le théorème de la valeur intermédiaire. En effet, $f(0) = -2$, $f(2) = +2$, et la fonction est continue *dans* $\mathbb{Q}$, mais il n'y a pas de nombre rationnel c tel que $f(c) = 0$.

Cela permet de comprendre encore un peu mieux la différence topologique entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, et pourquoi on a besoin d'être dans l'ensemble $\mathbb{R}$ pour travailler commodément avec les fonctions continues : on veut évidemment que le théorème de la valeur intermédiaire soit vrai.

Fonctions ayant des comportements étranges

J'ai promis, pour finir, un petit tour dans la galerie des fonctions tératologiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

En voici une première qui l'est un peu mais pas trop. Soit la fonction

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.15}$$

Elle est définie pour tous les nombres réels sauf $x = 0$ et elle est continue sur tout le domaine où elle est définie.

Voici son graphe, figure 4.7. La figure est extraite du volume 1, chapitre II, de l'ouvrage en trois volumes d'Alexandrov, Kolmogorov et Lavrentiev, *Mathématiques*, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2020.

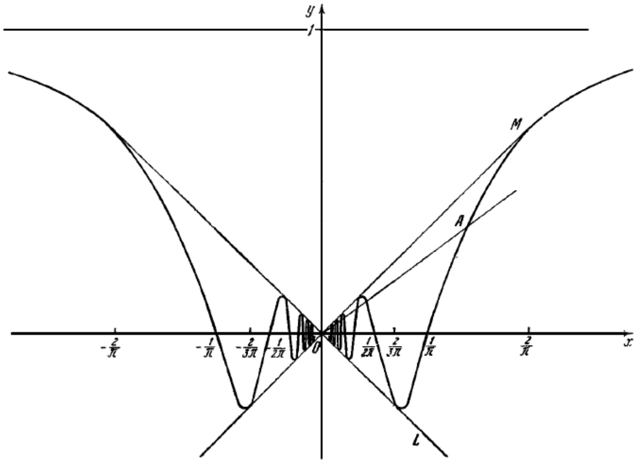


Figure 4.7 : Fonction $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Elle est définie et continue partout sur l'ensemble des nombres réels non nuls. Elle a la particularité qu'on peut la prolonger pour qu'elle soit définie et continue partout : ajouter $f(0) = 0$.

On peut la prolonger par continuité, afin qu'elle soit définie et continue partout. Il suffit d'attribuer à $f(0)$ la valeur zéro.

En revanche elle est tératologique en ce sens que la pente de sa sécante à droite et la pente de sa secante à gauche de zéro (on veut dire par là $[f(x)-f(0)]/[x-0]$) ne convergent pas vers des nombres (même différents l'un de l'autre), mais ne cessent d'osciller entre deux valeurs. Les sécantes jouent un rôle dans le calcul des dérivées que nous étudierons dans la leçon suivante.

Nous vous recommandons de lire le chapitre II du livre d'Alexandrov, Kolmogorov et Lavrentiev, au moins jusqu'à la section II.4, car elle donne d'autres exemples (non tératologiques) de fonctions continues, avec parfois des points de discontinuité, comme nous l'avons fait plus haut dans les exemples (pp. 51 à 55). Nous offrons ce chapitre II gratuitement à l'adresse

`lapasserelle.com/documents/kolmogorov_II_analyse.pdf`

Voici une fonction nettement plus tératologique, que celle ci-dessus. Il s'agit de la fonction de Thomae. Elle est définie de la manière suivante :

- Elle vaut 0 sur tous les irrationnels.
- Elle vaut 1 pour $x = 0$.
- Et pour les autres x rationnels, soit p/q la fraction irréductible représentant x avec $q > 0$, alors la valeur de la fonction de Thomae pour x est $1/q$.

Cette fonction est continue en tous les points irrationnels, et discontinue en tous les points rationnels. Elle ne peut pas être continue en les points (ou nombres) rationnels, car il existe toujours des irrationnels aussi proches que l'on veut de n'importe quel rationnel.

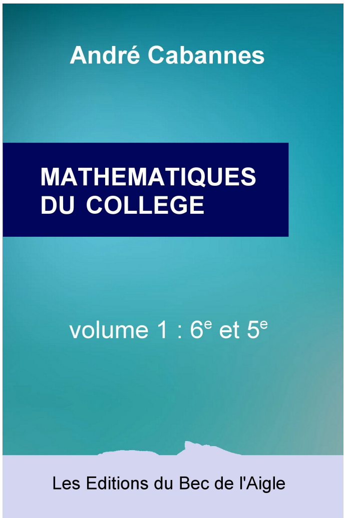
Suggestions de lecture

DESCARTES René, *Discours de la méthode*, 1637.
Nombreuses éditions. Ce livre est surtout important pour deux de ses trois annexes : la géométrie analytique et l'optique.

KATZ Victor J., editor, *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam : A Sourcebook*, Princeton University Press, 2007.

Catalogue des

ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE

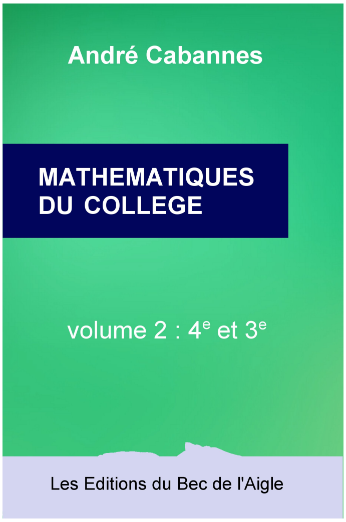


www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents

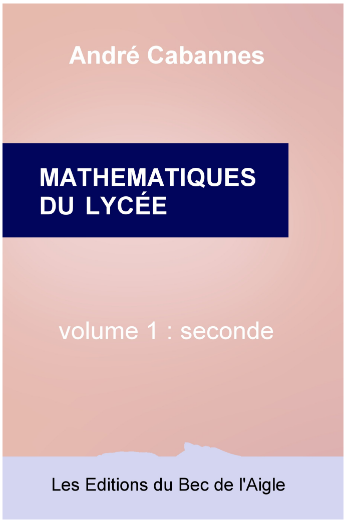


www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

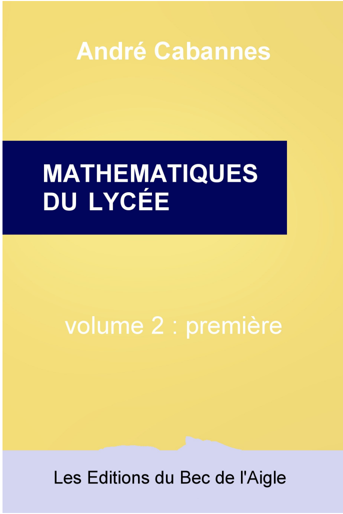
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239183

Cours de mathématiques de seconde

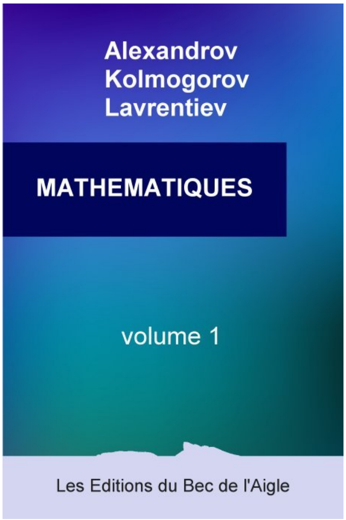
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191

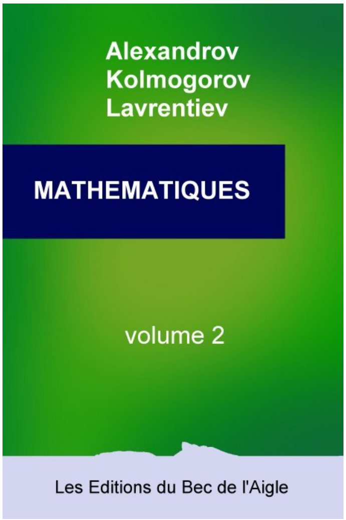
Cours de mathématiques de première

à l'intention des lycéens et de leurs parents



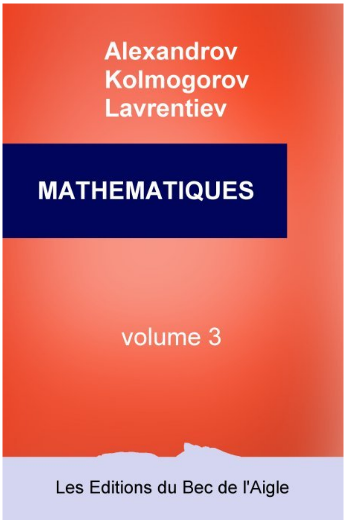
www.amazon.fr/dp/2957239124

Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)



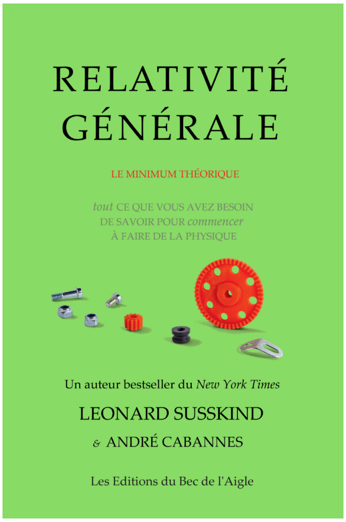
www.amazon.fr/dp/2957239116

Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132

Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



www.amazon.fr/dp/2957239175

Cours de physique
(niveau maîtrise)

www.amazon.fr/dp/2957239140

Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)