Leçon 16 : Applications des fonctions usuelles (2) : exemple avec une ellipse

Il existe plusieurs façons de construire une ellipse. En voici trois traditionnelles :

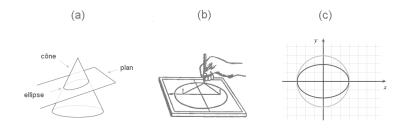


Figure 16.1 : Trois méthodes traditionnelles pour construire une ellipse.

La méthode (a) consiste à couper un cône par un plan. Dans la méthode (b), l'ellipse est le lieu des points M dont la somme des distances à deux points fixes est constante. De manière pratique, on peut la dessiner en plantant deux clous dans une planchette à une certaine distance d'un de l'autre, puis, avec une cordelette formant une boucle fermée de longueur supérieure à 2d et un crayon, tracer la courbe qu'on obtient en maintenant la cordelette toujours tendue, comme montré sur le dessin central, fig. 16.1. La méthode (c) consiste à partir d'un cercle et à opérer une compression de tout le plan, c'est-à-dire que chaque point M du plan, de coordonnées (x, y), est envoyé vers le point M' de coordonnées $(x, \lambda y)$. Par exemple sur le dessin de droite fig. 16.1, on a pris $\lambda = 2/3$. C'est une compression verticale de 2/3; le point (0, 3) est envoyé vers le point (0, 2); le point (5, 6) est envoyé vers le point (5, 4); mais les points de l'axe des x ne bougent pas. Le cercle initial de centre O et de rayon 3 est compressé en une ellipse un peu allongée horizontalement.

Depuis le collège, nous parlons des ellipses comme si c'étaient des objets courants, que tout le monde connaissait, au même titre que les cercles. Pour être « mathématique », il convient d'en donner une définition avant d'en parler. C'est généralement la méthode (c) qui sert de définition des ellipses. Nous verrons un peu plus loin l'équation générale d'une ellipse ayant pour axes de symétrie l'axe Ox et l'axe Oy.

Exercice 16.1 : Considérant la méthode (b) pour construire une ellipse, montrer que si la longueur de la cordelette formant une boucle est très grande par rapport à la distance d entre les deux clous, on obtient une courbe très proche d'un cercle.

Nous allons voir dans cette leçon que la méthode (b) est équivalente à la méthode (c).

D'autre part, montrer que la méthode (a) est équivalente à la méthode (b) est un exercice de géométrie dans l'espace que nous allons laisser de côté ¹.

Dans la suite de la leçon, pour nous une ellipse est donc la courbe ovale obtenue en « compressant » un cercle.

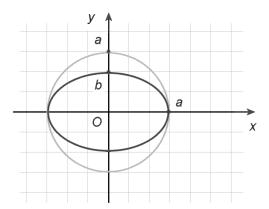


Figure 16.2 : Ellipse obtenue en compressant verticalement le cercle dans le rapport 2/3.

^{1.} Les lectrices et les lecteurs intéressés peuvent se reporter aux sphères de Dandelin dont nous avons brièvement parlé dans notre livre *Mathématiques du collège, volume 1 : 6e et 5e,* page 237. Merci à T. qui, le premier, m'en a parlé.

On part d'un cercle de centre (0, 0) et de rayon a. C'est le cercle grisé sur le fig. 16.2. Son équation est

$$x^2 + y^2 = a^2 (16.1)$$

Quand on commence à parler de l'« équation d'une courbe », c'est généralement le moment où les gens qui n'ont pas l'esprit mathématique décrochent. À l'inverse, c'est souvent aussi celui où embrayent les élèves qui ingurgitent de manière passive l'enseignement scolaire et sont seulement capables de reproduire dans des exercices et problèmes prédigérés les méthodes qu'on leur a enseignées. Ces élèves, qui sont souvent de « bons élèves » ², plongent alors dans la manipulation algébrique des équations, sans trop se soucier de leur origine ou de ce qu'elles veulent dire.

Il faut reconnaître qu'il y a en effet quelque chose de fascinant et magique dans la manipulation des équations. C'est ce que nous avons appelé, lors de la résolution du problème de mécanique de la leçon 13, « tourner la manivelle », cf. page 120. On arrive à des résultats qui, à l'aide de signes ésotériques, révèlent aux initiés des choses sur le problème qu'on étudie. Dans le problème de mécanique sur le choc de deux disques, nous sommes arrivés aux équations $v = \frac{2V_0}{1+\frac{m}{M}}$ et $V = V_0 \frac{\left(1-\frac{m}{M}\right)}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}$ qui, quand on sait les lire, nous disent comment les disques vont se comporter avec le choc.

En réalité la manipulation algébrique des équations ne doit être qu'une des phases d'un exercice de mathématiques. Et les mathématiques, elles-mêmes, ne doivent être que le domaine dans lequel on évolue quand on a mathématisé notre problème. Ce qui est important, ce n'est pas les mathématiques, c'est le problème. Et il faut toujours y penser et pouvoir l'exprimer en bon français.

Au risque de faire bondir certains, on peut dire que les mathématiques ne sont que de la sténographie pour parler commodément et précisément de problèmes réels exprimables en bon français.

Pour conclure, quand on dit que telle courbe a pour équation f(x,y) = 0, par exemple $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, on veut simplement dire que la courbe est le lieu des points M dont les coordonnées satisfont la contrainte f(x,y) = 0. Est-ce que les coordonnées du point

^{2.} Plus tard, ces « bons élèves » décrochent un jour mystérieusement eux aussi, ou alors restent toute leur vie des gens au savoir docte, « les choses sont comme ça et pas autrement », donnant l'impression qu'ils ont des œillères. Voir le livre de Gaston Bachelard, La formation de l'esprit scientifique, Vrin, 1938, disponible ici https://gastonbachelard.org/wp-content/uploads/2015/07/formation_esprit.pdf pour en savoir plus sur la question.

 $(-1,\,4)$ satisfont $x^2+y^2-3^2=0\,?$ Non. Donc il ne fait pas partie de la courbe d'équation $x^2+y^2-3^2=0.$ Est-ce que les coordonnées du point $(1,\sqrt{8})$ satisfont $x^2+y^2-3^2=0\,?$ Oui. Donc il fait partie de la courbe. Comme l'on sait, cette courbe est un cercle de rayon 3 centré à l'origine. L'équation $x^2+y^2-a^2=0$ est même la définition algébrique d'un cercle, car elle est algébriquement équivalente à la définition géométrique qu'on a apprise à l'école primaire : un cercle est l'ensemble des points à égale distance d'un point donné.

Ce qui caractérise les grands mathématiciens ou les grands physiciens, ce n'est pas tant d'être très intelligents que d'avoir l'esprit très clair. Mais c'est vrai aussi des grands avocats ou des grands médecins.

J'ai eu la chance dans ma vie de travailler avec des groupes de personnes douées, dans des domaines variés. Le seul reproche qu'on peut leur faire est fréquemment de se sentir supérieur au reste du monde, ou en tout cas de penser comprendre le monde mieux que les autres. C'est vrai des mathématiciens, des physiciens, des avocats, des médecins, des consultants en stratégie, mais aussi des sociologues, des psychologues, des philosophes, des banquiers, des ingénieurs, et même des romanciers, des artistes peintres et des comptables. Et c'est vrai naturellement des confesseurs.

Après ces considérations sur ce que sont les mathématiques, sans doute inhabituelles dans un manuel de maths de seconde, mais qui sont à nos yeux très importantes si on veut aller loin dans la vie, retournons à nos ellipses:-)

Dans une compression du plan³, à tout point (x, y) on fait correspondre un point de même abscisse x et d'ordonnée λy . Sur la figure 16.2, on a pris $\lambda = b/a$, avec pour être concrets, a = 3 et b = 2.

Donc le sommet du cercle, qui a les coordonnées (0, a) est envoyé vers le point de coordonnées (0, b) qui devient le sommet de l'ellipse. On note parfois cette transformation comme ceci :

compression verticale:
$$(x, y) \rightarrow (x, \frac{b}{a}y)$$
 (16.2)

^{3.} On parle ici de compression verticale. On peut bien sûr faire une compression dans n'importe quelle direction. Une droite donnée D remplacera alors l'axe Ox et on fera une compression vers la ligne droite en restant perpendiculaire à elle. On peut même faire des transformations obliques, mais laissons ça pour plus tard. Pour l'instant on considère une compression verticale qui transforme, de la manière la plus simple, un cercle en ellipse.

Alors les points (x, y) de la courbe foncée, c'est-à-dire l'ellipse, satisfont l'équation

 $x^2 + \frac{a^2}{h^2}y^2 = a^2 (16.3)$

car cela revient à dire que, quand on rallonge leur ordonnée, ils satisfont l'équation (16.1) qui est l'équation du cercle de centre O et de rayon a.

L'équation (16.3) est généralement notée

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ag{16.4}$$

C'est l'équation canonique d'une ellipse ayant pour axes de symétrie l'axe Ox et l'axe Oy^4 . L'ellipse d'équation (16.4) passe par les points (a, 0), (0, -b), (-a, 0), et (0, b). L'axe Ox s'appelle son grand axe, et l'axe Oy son petit axe (quand a > b).

Exercice 16.2 : On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Questions:

- 1. Le point (2, 2) est-il sur l'ellipse?
- 2. Quelle est l'ordonnée de chacun des points sur l'ellipse, dont l'abscisse est 2?

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

On ne va pas s'occuper de cette équation générale en classe de seconde. En première, nous verrons l'équation d'une parabole inclinée qui fait partie de la famille générale des coniques.

Rappel: Pourquoi se soucie-t-on tant des coniques? Tout simplement car ce sont les courbes les plus simples après les droites. Et elles apparaissent un peu partout en physique. Par exemple, si vous jetez un caillou en l'air, il va décrire une parabole avant de retomber. Les planètes décrivent des ellipses autour du soleil, lequel est à l'un de leurs foyers.

^{4.} On peut tracer également dans le plan des ellipses inclinées. Il suffit de les faire tourner un peu. Leur équation générale fait alors partie de l'équation générale de toutes les coniques. Cette dernière a la forme

- 3. On considère toutes les droites dans le plan de pente 2/3. Elles sont toutes parallèles. Pour chacune de celles qui ont une intersection avec l'ellipse, on considère les deux points d'intersection et le milieu de ces deux points. Vérifier à l'aide d'une construction sur une feuille de papier que tous ces points médians sont alignés. Pouvez-vous expliquer pourquoi?
- 4. Est-ce vrai aussi pour toutes les droites de pente donnée p quelconque?

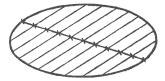


Figure 16.3 : Milieux des intersections de l'ellipse avec toutes les droites de pente p.

Tangente au cercle. Revenons au cercle grisé sur la figure 16.2. Considérons pour commencer un point M de coordonnées (α_0, β_0) sur ce cercle, et la tangente au cercle en le point M.

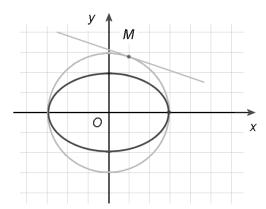


Figure 16.4 : Cercle de rayon a. Point M sur le cercle. Et tangente au cercle en le point M.

Si le rayon est égal à 3, et M a l'abscisse 1 et est au-dessus de l'axe des x, le théorème de Pythagore nous permet de calculer que son ordonnée est $\sqrt{8}$.

La tangente en M au cercle est une ligne droite ayant pour équation

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = a^2 \tag{16.5}$$

On le vérifie aisément quand on sait qu'elle passe par M et a pour pente $-\frac{\alpha_0}{\beta_0}$. Pourquoi a-t-elle cette pente? Parce qu'elle est perpendiculaire au rayon OM qui a, lui, pour pente $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$.

Rentrons dans le détail, pour renforcer notre connaissance pratique des droites. Regardons la figure 16.5. Et sur la tangente, déplaçons-nous du point B au point C.

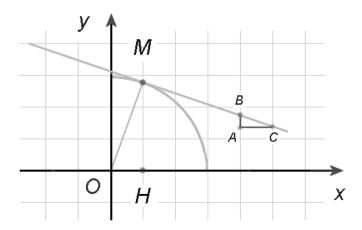


Figure 16.5 : Examen de la pente de la tangente en M.

En allant de B à C, on se déplace horizontalement d'une distance AC=1 vers la droite, et en même temps on descend d'une distance h=AB verticalement. Cette distance h est égale à α_0/β_0 . Pourquoi ? Par le théorème de Thalès appliqué aux triangles OHM et BAC. Ils ont la même forme à une échelle différente. Donc les rapports de distance entre les côtés restent les mêmes : h/1 doit être égal à α_0/β_0 . Et il faut mettre un signe moins à la pente, car on descend.

En résumé, la tangente a pour pente $-\alpha_0/\beta_0$, et elle passe par M. Donc son équation peut s'écrire

$$\frac{y - \beta_0}{x - \alpha_0} = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} \tag{16.6}$$

Un peu d'algèbre donne

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \tag{16.7}$$

Or nous savons que $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = a^2$, car M est sur l'ellipse. Nous sommes donc arrivés à l'équation

$$\alpha_0 x + \beta_0 y = a^2 \tag{16.8}$$

donnée plus haut pour la tangente 5 . C'était l'équation (16.5). L'équation (16.8) est la même.

Observer que l'équation (16.8) de la tangente au cercle en le point M peut se réécrire

$$\frac{\alpha_0 x}{a^2} + \frac{\beta_0 y}{a^2} = 1 \tag{16.9}$$

où a est le rayon du cercle. Elle ressemble beaucoup à l'équation du cercle quand on écrit cette dernière $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Mais x^2 y est dédoublé en $\alpha_0 x$ et y^2 en $\beta_0 y$. Tout cela va se transformer élégamment quand on va regarder les ellipses.

Exercice 16.3: Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 5$. Quelle est l'équation de la tangente au cercle en le point de coordonnées (2, 1)?

Exercice 16.4: Soit le cercle d'équation $x^2+y^2=5$. Quelles sont les équations des deux droites passant par le point (10, -5) et tangentes au cercle?

^{5.} C'est aussi une propriété du produit scalaire entre deux vecteurs que nous étudierons l'année prochaine : une droite d'équation ax+by=c exprime que les vecteurs le long de la droite sont perpendiculaires au vecteur de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. L'équation (16.8) indique que les déplacements sur la tangente sont perpendiculaires à la direction $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire au vecteur \overrightarrow{OM} .

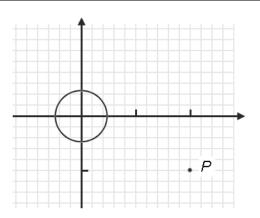


Figure 16.6 : Calculer les équations des deux droites passant par ${\cal P}$ et tangentes au cercle.

Conseil : Utiliser de la trigonométrie, ou bien une méthode approximative, similaire à la méthode de Héron.

Tangente à l'ellipse. Par la transformation qui consiste à multiplier toutes les ordonnées par b/a, la tangente T_0 au cercle devient la tangente T à l'ellipse en le point P transformé de M, fig. 16.7.

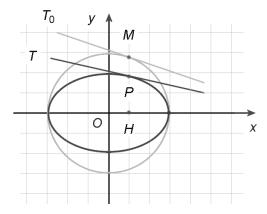


Figure 16.7 : Compression du cercle pour en faire une ellipse. La tangente T_0 au cercle devient la tangente T à l'ellipse..

La compression transforme les droites en droites. C'est une conséquence du théorème de Thalès. Elle transforme les tangentes en tangentes. Il y a différentes façons de le « prouver rigoureusement ». Mais contentons-nous d'observer que l'ellipse et sa tangente est tout simplement une vue « réduite dans une des deux dimensions » du cercle et sa tangente.

En outre, les tangentes T_0 et T se coupent en un point Q qui est forcément sur l'axe des x – toujours par Thalès.

Appelons (α, β) les coordonnées de P. Continuons à appeler celles de M (α_0, β_0) . On a $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \frac{b}{a}\beta_0$.

L'équation de la tangente T à l'ellipse est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1 {(16.10)}$$

Nous le démontrons ci-après. Notons dès à présent que c'est, là aussi, une forme très proche de l'équation canonique de l'ellipse, voir équation (16.4), où x^2 devient αx et y^2 , βy . C'est pourquoi l'équation de la tangente à l'ellipse en un point P est facile à retenir.

Démonstration:

De l'équation (16.9), on déduit que la tangente T_0 au cercle en le point M a pour équation réduite

$$y = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}x + \frac{a^2}{\beta_0} \tag{16.11}$$

Donc les points de la tangente T – qui est obtenue à partir de T_0 en effectuant une compression d'un facteur b/a sur l'ordonnée des points de la tangente au cercle – satisfont

$$\frac{a}{b}y = -\frac{\alpha_0}{\beta_0}x + \frac{a^2}{\beta_0} \tag{16.12}$$

Autrement dit, du côté gauche, on a remultiplié l'ordonnée par le facteur inverse de la compression.

Avec un peu d'algèbre, en utilisant le fait que $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \frac{b}{a}\beta_0$, l'équation (16.12) se réécrit de manière plus élégante

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1\tag{16.13}$$

qui est la même que l'équation (16.10) ci-dessus.

C.Q.F.D.

Avant de passer à l'étude de l'excentricité et des foyers de l'ellipse, nous vous proposons un exercice pour parfaire votre compréhension des concepts élémentaires sur l'ellipse. Vous pouvez sauter cet exercice et passer directement à la suite, si vous avez le sentiment de bien comprendre ce qu'on a fait jusqu'ici.

Exercice 16.5: On se réfère à la figure 16.7 p. 151. Les points M et P ont pour abscisse 1. Et l'ellipse est obtenue par compression verticale du cercle dans le rapport 2/3. Les droites T_0 et T, sont respectivement tangentes au cercle en le point M et à l'ellipse en le point P.

- 1. Expliquer pourquoi les tangentes T_0 et T se coupent en un point Q situé sur l'axe des x?
- 2. Montrer que la longueur du segment HM est $\sqrt{8}$.
- 3. Montrer que le point Q, intersection par exemple de T_0 et l'axe des x, est à l'abscisse 9. Conseil : vous pouvez utiliser un théorème sur la hauteur dans un triangle rectangle, démontré dans notre cours de troisième 6 .
- 4. Appelons θ l'angle \widehat{OQM} . Montrer que $\sin \theta \approx 0,3333$ et $\cos \theta \approx 0,9428$.
- 5. À l'aide de la fonction arcsin, qui est la fonction inverse de la fonction sinus, et est définie sur le segment $[-90^{\circ}, 90^{\circ}]$, en déduire que l'angle \widehat{OQM} est approximativement 19,47 degrés.

Excentricité d'une ellipse. On pourrait utiliser le rapport b/a pour décrire « l'allongement » de l'ellipse, par rapport à un cercle, mais le coefficient le plus commode dans les calculs est le facteur

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{16.14}$$

Ce nombre « e » n'a rien à voir avec le nombre e=2,71828... dont on a déjà parlé. Ici on utilise la lettre « e » pour signifier « excentricité ». C'est un nombre qui varie de 0 à 1 selon la forme de l'ellipse. Un cercle a une excentricité de zéro; une ellipse très aplatie a une excentricité qui s'approche de 1. Au-delà de 1 (avec une équation légèrement différente), on a une hyperbole.

^{6.} Mathématiques du collège, volume 2 : 4e et 3e, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2022, exercice I.19.3, page 123.

Dans l'exemple où a=3 et b=2, l'excentricité de l'ellipse est $e\approx 0,75$.

Foyers d'une ellipse. On considère une ellipse dont le grand axe a la longueur 2a et le petit axe la longueur 2b. On la représente dans un repère cartésien rectangulaire ordinaire dont l'origine est le centre de l'ellipse, et l'axe des x est son grand axe. Bref on considère une ellipse aplatie horizontalement comme nous avons fait jusqu'ici.

Soit les deux points $F_1 = (ae, 0)$ et $F_2 = (-ae, 0)$. On les appelle les foyers de l'ellipse, fig. 16.8. Ils ont des propriétés géométriques remarquables. Nous allons en voir deux – que nous allons démontrer – dans la suite de la leçon.

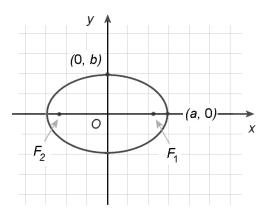


Figure 16.8 : Définition des foyers de l'ellipse. Ce sont les deux points sur le grand axe aux abscisses respectives ae et -ae, où a est la longueur du demi-grand axe, et e est l'excentricité de l'ellipse.

On considère en outre un point quelconque P sur l'ellipse, et nous allons regarder la tangente en P. Sur la figure on va prendre, par exemple, le point P à l'abscisse 2 (juste un peu à gauche de F_1), et situé sur la partie de l'ellipse au-dessus de l'axe des x.

Exercice 16.6: Montrer que si P est le point sur l'ellipse de la figure 16.8 à l'abscisse 2, et du côté des ordonnées positive, alors l'ordonnée du point P est $\frac{2}{3}\sqrt{5}$.

Nous allons démontrer un premier théorème qui certifiera que la méthode (b) au début de la leçon, page 143, est équivalente à la méthode (c).

Soit une ellipse dont le demi-grand axe a la longueur a, et le demi-petit axe la longueur b. Alors, quel que soit le point P sur l'ellipse, la somme des distances de P à F_1 et F_2 est constante. Et elle vaut 2a.

<u>Démonstration</u>: On va tout simplement calculer les deux longueurs PF_1 et PF_2 . On prend un point P quelconque de coordonnées (α, β) .

Commençons par la longueur PF_1 . Le théorème de Pythagore nous dit que

$$PF_1^2 = (\alpha - ae)^2 + \beta^2$$

et d'après l'équation de l'ellipse, équation (16.4), on a

$$\beta^2 = b^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2} \right)$$

Après un peu de calculs algébriques, que le lecteur et la lectrice sont fortement invités à refaire eux-mêmes, on trouve

$$PF_1^2 = \left(a - \frac{\alpha}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 \tag{16.15}$$

De même on a

$$PF_2^2 = (\alpha + ae)^2 + \beta^2$$

Avec quelques calculs similaires à ceux pour PF_1 on trouve

$$PF_2^2 = \left(a + \frac{\alpha}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2$$
 (16.16)

De (16.15) et (16.16), on déduit que

$$PF_1 + PF_2 = 2a (16.17)$$

C.Q.F.D.

Passons maintenant à une propriété sur les angles.

Propriété de la tangente à l'ellipse au point P. Considérons la tangente à l'ellipse au point P, fig. 16.9. Appelons-la T. Elle coupe l'axe des x au point Q.

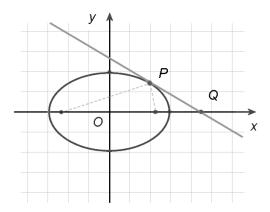


Figure 16.9 : Tangente à l'ellipse au point P.

Exercice 16.7: Sur la figure 16.9, avec une ellipse de demigrand axe égal à 3, et demi-petit axe égal à 2, et le point P de coordonnées $(2, \frac{2}{3}\sqrt{5})$, donner l'équation de la tangente en le point P.

Quelle est l'abscisse du point Q?

La tangente coupe-t-elle l'axe des y au point d'ordonnée 2,5?

Comme on l'a établi plus haut, l'équation de la tangente en un point de coordonnées quelconques (α, β) est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$$

Et le point Q a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{\alpha},\ 0\right)$.

On va s'intéresser aux angles au point P entre la tangente et les segments PF_1 et PF_2 . On appelle ces derniers des « rayons » issus des foyers.

Appelons ϕ l'angle $\widehat{PQF_1}$ au point Q.

On va aussi appeler θ_1 l'angle $\widehat{F_1PQ}$, et θ_2 l'angle $\widehat{F_2PQ}$, fig. 16.10. Je n'ai pas noté θ_2 sur la figure pour ne pas l'alourdir. Rappel : F_1 est le foyer de droite sur l'axe des x, F_2 est celui de gauche.

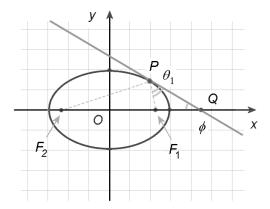


Figure 16.10 : ϕ est l'angle entre la tangente et l'axe des x, comme montré sur le dessin. θ_1 est l'angle $\widehat{F_1PQ}$ entre le rayon issu de F_1 rejoignant P et la tangente, comme montré sur le dessin. θ_2 est l'angle $\widehat{F_2PQ}$ (pas montré sur le dessin pour ne pas l'alourdir) entre le rayon issu de F_2 rejoignant P et la tangente.

On va montrer que $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$. Cela revient au même que de dire que $\theta_1 = \theta_3$, car $\theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$, fig. 16.11.

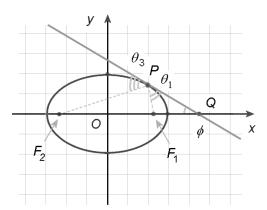


Figure 16.11 : Quel que soit P, les angles θ_1 et θ_3 sont égaux.

Cela établira un deuxième théorème très important sur les ellipses :

Un rayon quelconque qui part du point F_1 et se réfléchit sur l'ellipse, passe ensuite par le point F_2 .

C'est vrai aussi en partant de F_2 : on arrive à F_1 . C'est la raison pour laquelle les deux points F_1 et F_2 s'appellent les foyers de l'ellipse.

Démonstration de la propriété de réflexion sur la tangente.

On veut donc montrer que θ_1 et θ_3 sont égaux. Pour cela on va utiliser une formule importante des triangles, que l'on a vue en quatrième, et qui est vraie pour n'importe quel triangle.

Soit un triangle ABC quelconque, fig. 16.12.

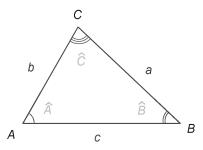


Figure 16.12 : Triangle ABC quelconque.

Alors la *règle des sinus* énonce que

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \tag{16.18}$$

Revenons à notre ellipse, ses foyers et sa tangente en P, fig. 16.11. On va travailler avec les triangles PQF_1 et PQF_2 .

Dans le triangle PQF_1 , on a

$$\frac{\sin \theta_1}{F_1 Q} = \frac{\sin \phi}{P F_1}$$

et dans le triangle PQF_2 , on a

$$\frac{\sin \theta_2}{F_2 Q} = \frac{\sin \phi}{P F_2}$$

Si on montre que

$$\frac{F_1Q}{PF_1} = \frac{F_2Q}{PF_2}$$

alors on aura prouvé que $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$, ce qui prouvera qu'ils sont complémentaires. Ou, si l'on préfère, on aura montré que $\sin \theta_1 = \sin \theta_3$ et donc que ces deux angles sont égaux. (Se rappeler que le sinus d'un angle et le sinus de son complémentaire à 180° sont égaux.)

Donc il s'agit de montrer que l'identité ci-dessous est vérifiée. On pousse un peu l'algèbre (on « tourne la manivelle ») et on obtient :

$$F_1Q \times PF_2 = F_2Q \times PF_1 ?$$

$$\longrightarrow \left(\frac{a^2}{\alpha} - ae\right) \left(a + \frac{\alpha}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right) =$$

$$\left(\frac{a^2}{\alpha} + ae\right) \left(a - \frac{\alpha}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right) ?$$

$$\longrightarrow -a^2e + a\sqrt{a^2 - b^2} = a^2e - a\sqrt{a^2 - b^2} ?$$

$$\longrightarrow ae = \sqrt{a^2 - b^2} ?$$

Cette dernière équation est-elle toujours vraie, c'est-à-dire estelle une égalité? Réponse : oui.

C.Q.F.D.

Application physique. Dans une grande pièce de forme ovale (ou bien ayant un plafond en ellipsoïde), une personne située au foyer F_1 peut entendre une conversation à voix basse entre deux personnes situées au foyer F_2 .

La légende raconte qu'à Washington, dans la grande salle du Capitole appelée Statuary Hall, John Quincy Adams (1767, 1848), président des États-Unis de 1825 à 1829, utilisait cette technique pour écouter des conversations secrètes de ses opposants.

Pour aller plus loin (1) : Démonstration de la propriété de réflexion par le calcul infinitésimal. Quand on apprendra le calcul infinitésimal, on pourra démontrer très simplement l'égalité de θ_1 et θ_3 .

Déplaçons-nous à partir du point P d'une petite longueur δ vers la gauche tout en restant sur l'ellipse. Le rayon vers le foyer F_1 s'allonge d'une longueur $\delta \times \cos \theta_1$ (plus un infinitésimal d'ordre

supérieur, c'est-à-dire beaucoup plus petit) et le rayon vers F_2 se raccourcit d'une longueur $\delta \times \cos \theta_3$. Comme ces deux longueurs doivent être égales, on en déduit que $\theta_1 = \theta_3$.

Pour aller plus loin (2): Directrices de l'ellipse et de l'hyperbole 7. De même que la parabole a une directrice, l'ellipse et l'hyperbole ont des directrices. Elles en ont même chacune deux. Si nous prenons le foyer et la directrice d'un côté, alors pour tous les points M de l'ellipse on a $\frac{\rho}{d} = e$, où e est l'excentricité de l'ellipse considérée, ρ (lire « ro ») la distance au foyer, et d la distance à la directrice. Pour les ellipses, l'excentricité est toujours plus petite que un. Et pour tous les points appartenant à la branche de l'hyperbole correspondante, on a aussi $\frac{\rho}{d} = e$, où e est l'excentricité de l'hyperbole considérée. Pour les hyperboles elle est toujours plus grande que un.

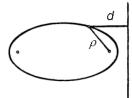




Fig. 16.13a : Foyer et directrice d'un côté d'une ellipse

Fig. 16.13b : Foyer et directrice d'un côté d'une hyperbole.

Ainsi, l'ellipse, la parabole et une branche de l'hyperbole sont les lieux géométriques de tous les points du plan pour lesquels le ratio entre leur distance ρ au foyer et leur distance d à la directrice est constant (fig. 16.13a et 13b). Cette constante est plus petite que 1 pour l'ellipse, égale à 1 pour la parabole, et plus grande que 1 pour l'hyperbole. Dans ce sens (mais aussi dans d'autres), la parabole est donc un cas « limite » ou une « transition » entre l'ellipse et l'hyperbole.

Suggestions de lecture

Bachelard Gaston, La formation de l'esprit scientifique, Vrin, 1938. Conseillé si vous avez le niveau baccalauréat.

^{7.} Extrait du livre d'Alexandrov, Kolmogorov et Lavrentiev, *Mathéma-tiques*, volume 1, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2020, page 341.

Catalogue des

ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1:6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents

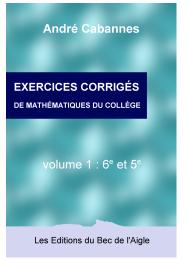


www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

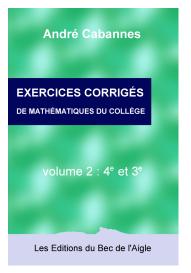
Volume 2: 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/2958738566}}{\text{Maths du collège volume 1}}$

Le livre de CORRIGÉS des exercices



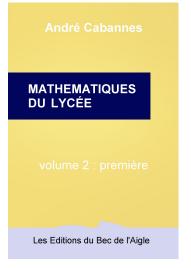
 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/}2958738574}{\text{Maths du collège volume 2}}$

Le livre de CORRIGÉS des exercices



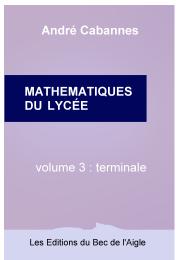
 $\frac{www.amazon.fr/dp/2957239183}{Cours~de~math\acute{e}matiques~de~seconde}$

à l'intention des lycéens et de leurs parents



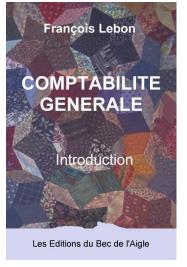
 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/2957239191}}{\text{Cours de mathématiques de première}}$

à l'intention des lycéens et de leurs parents

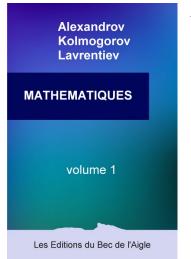


 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/2958738507}}{\text{Cours de mathématiques de terminale}}$

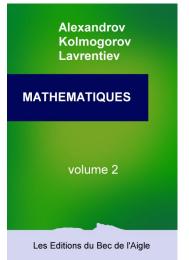
à l'intention des lycéens et de leurs parents



 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/2957239140}}{\text{Cours de comptabilit\'e (niveau baccalaur\'eat)}}$



 $\frac{www.amazon.fr/dp/2957239124}{Introduction~aux~math\'{e}matiques}$ (niveau baccalaur\'{e}at)

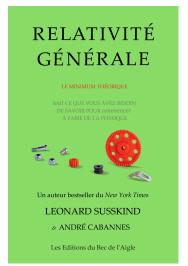


www.amazon.fr/dp/2957239116

Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)

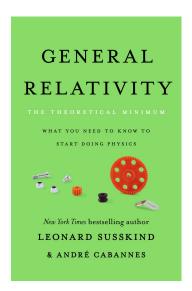


 $\frac{www.amazon.fr/dp/2957239132}{Les\ mathématiques\ pour\ l'étudiant}\\ spécialisé et le chercheur (niveau licence)$



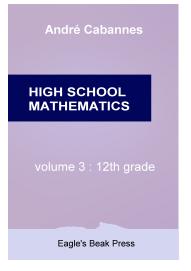
 $\frac{\text{www.amazon.fr/dp/2957239175}}{\text{Cours de physique}}$ (niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



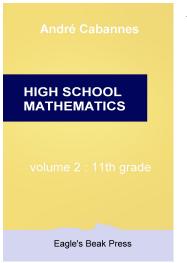
 $\frac{www.amazon.com/dp/B09ZB613QY}{General\ Relativity}$

Graduate studies.



 $\frac{www.amazon.com/dp/2958738515}{High\ school\ mathematics}$

 $Volume \ 3:12 th \ grade$



 $\underline{www.amazon.com/dp/2958738523}$

 ${\bf High\ school\ mathematics}$

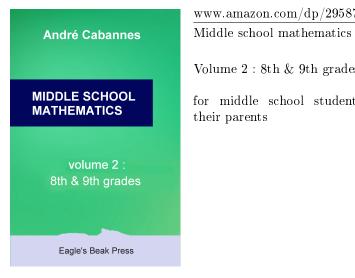
 $Volume\ 2:11th\ grade$



www.amazon.com/dp/2958738531

High school mathematics

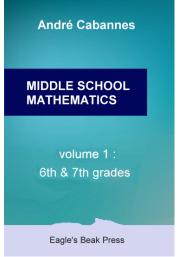
 $Volume\ 1:10th\ grade$



www.amazon.com/dp/295873854X

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and their parents



www.amazon.com/dp/2958738558

Middle school mathematics

Volume 1:6th & 7th grades

for middle school students and their parents