

Leçon 5 :

Nombres complexes

Avant de présenter les nombres complexes dans le style de nos ouvrages (histoire, découverte, manipulations, propriétés), pour mettre un peu de fantaisie dans notre livre amusons-nous à les présenter à la manière d'un livre d'algèbre moderne et aride.

Définition de l'ensemble des nombres complexes et ses opérations

La structure algébrique des nombres complexes consiste en l'ensemble produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des paires (a, b) où a et b sont des nombres réels, muni de deux opérations :

1. La première opération, notée avec le signe $+$, est appelée l'addition :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (5.1)$$

2. La deuxième opération, notée avec le signe $\times$, est appelée la multiplication ou le produit :

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \quad (5.2)$$

Observons que le produit de l'élément $(0, 1)$ par lui-même donne

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) \quad (5.3)$$

Cette propriété jouera un rôle important dans la suite, etc.

Certains livres démarrent effectivement leur présentation des nombres complexes comme cela :-)

Il est laissé au soin des lecteurs et des lectrices de se forger une conception plus concrète de ces nombres. Parfois une bonne âme leur a parlé de la notation $a + ib$, et ils traduisent les paires (a, b) en les nombres $a + ib$, avec $i^2 = -1$.

Les mathématiciens qui suivent la présentation ci-dessus le font du reste aussi – sans le dire.

Alors passons maintenant à notre style de présentation.

Histoire de la découverte des nombres complexes

Les hommes et les femmes utilisent les nombres entiers naturels positifs depuis au moins le paléolithique supérieur (-50 000 ans). Sans l'exprimer sous cette forme moderne, qui date du XVI^e siècle, ils savaient résoudre des équations comme

$$3 + x = 8$$

et aussi

$$8 - x = 3$$

quand le nombre auquel il fallait arriver était plus petit que le nombre auquel il fallait soustraire une quantité inconnue.

Ils savaient faire des multiplications

$$5 \times 9 = 45$$

encore une fois, pas du tout notées comme ça.

De même que l'addition conduit naturellement à l'opération inverse, la soustraction, la multiplication conduit à l'opération inverse, la division.

Dès la Haute Antiquité, en Babylonie et en Égypte, on avait élaboré le concept de nombre fractionnaire, d'abord des fractions de l'unité. Par exemple en divisant 1 par 5 on obtenait un nombre qu'on appelait un cinquième. On le notait de diverses manières. C'est seulement au cours du deuxième millénaire de notre ère qu'on s'est mis à le noter $\frac{1}{5}$.

Les fractions ont la particularité qu'elles ont pour nom et pour notation le résultat d'une opération. Le nombre $\frac{35}{6}$ est le résultat de la division de 35 par 6. Mais, après tout, quatre-vingt-dix-huit est aussi un nombre nommé par le résultat d'une opération. Il est en revanche noté comme tous les autres nombres avec la représentation décimale positionnelle qui obéit à des règles strictes.

Les nombres négatifs sont apparus progressivement à partir du XIII^e siècle, quand les chiffres indo-arabes et la notation décimale ont commencé, très lentement, à se répandre en Occident. C'était la conséquence en particulier du début de l'utilisation de la comptabilité en partie double¹ en Europe.

C'est le moment de rouvrir notre livre de sixième et cinquième pour réviser les nombres entiers et les fractions, leurs noms, leurs notations et les opérations arithmétiques.

1. Voir le livre de François Lebon, *Comptabilité générale*, Les Éditions du Bec de l'Aigle, 2021.

Résumons où nous en étions vers 1500.

On savait résoudre l'équation

$$a + x = b \quad (5.4)$$

et l'équation

$$ax = b \quad (5.5)$$

où a et b étaient n'importe quels nombres entiers, relatifs ou rationnels, c'est-à-dire en notation moderne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, avec

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

On savait aussi résoudre depuis longtemps des équations du second degré. Rappelons brièvement l'histoire.

Vers la fin du VI^e siècle av. J.-C., l'école de Pythagore, à Crotone dans le sud de l'Italie, avait découvert le théorème de Pythagore, qui énonce que dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Ce faisant elle avait aussi découvert les irrationnels. Nous en avons souvent parlé et nous n'allons pas y revenir.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ avait donc été élargi à l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

À vrai dire les Babyloniens connaissaient déjà, de manière plus ou moins claire, depuis un millier d'années le théorème de Pythagore. On trouve aussi des références aux « triplets pythagoriciens »², sinon au théorème de Pythagore dans sa forme parlant de surfaces, en Égypte au deuxième millénaire avant notre ère.

Les Babyloniens de l'Ancien Empire (c. -1900, c. -1600) savaient même résoudre des équations du second degré comme

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Et ils donnaient la méthode pour calculer la solution sous une forme étonnamment proche de celle moderne pour l'équation trinôme générale

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5.6)$$

à savoir

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.7)$$

2. Ce sont les triplets de nombres entiers n , m , p , tels que $n^2 + m^2 = p^2$.

En 1500 on savait donc aussi résoudre les équations du second degré. On savait qu'elles avaient des solutions ou pas selon que le discriminant $\sqrt{b^2 - 4ac}$ était positif ou nul, ou négatif. S'il était positif, il y avait deux solutions distinctes. S'il était nul, il y avait une seule solution double. S'il était négatif il n'y avait pas de solution.

Au début du XVII^e siècle, la géométrie analytique de Descartes donna une interprétation lumineuse de ce fait à l'aide de la position de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ par rapport à l'axe des x .

Au début du XVI^e siècle, les mathématiciens italiens cherchaient à résoudre de la même manière l'équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (5.8)$$

À l'aide d'un changement de variable élémentaire de la forme $z = x - \alpha$, c'est-à-dire une translation, et d'une division par a , ils la transformaient en l'équation réduite

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (5.9)$$

Le mathématicien Scipione del Ferro (1465, 1526) sut la résoudre, mais ne publia pas sa solution. La solution ci-dessous est due à Niccolò Tartaglia (1499, 1557) qui vraisemblablement retrouva la méthode de del Ferro.

Tartaglia introduisit une astuce géniale : il remplaça l'inconnue unique z , par *deux inconnues* u et v telles que $z = u + v$. Cela paraît absurde, mais cela permet d'ajuster une contrainte supplémentaire sur u et v à notre convenance. Tartaglia imposa ainsi $uv = -\frac{p}{3}$. Cela lui permit, avec un peu d'algèbre sur l'équation (5.9), de parvenir au système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (5.10)$$

C'est un résultat élémentaire de montrer que x_1 et x_2 satisfont

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \quad (5.11)$$

si et seulement si ce sont les deux solutions de l'équation trinôme

$$x^2 + bx + c = 0$$

Tartaglia en déduisit que u^3 et v^3 devaient être les deux solutions de

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

c'est-à-dire

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (5.12)$$

Finalement, puisque $z = u + v$, on obtient comme solution de (5.9)

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (5.13)$$

Cette formule porte le nom de formule de Cardan, car il l'a publiée dans son livre *Ars magna* en 1545, après que Tartaglia la lui eut expliquée – à la condition que Cardan la garde secrète...

Le formule (5.13) a clairement un sens quand $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$, car on peut alors prendre sa racine carrée. Celle-ci apparaît dans les deux racines cubiques. Les racines cubiques ne posent pas de problème, car on peut toujours prendre la racine cubique d'un nombre même négatif. En revanche dans $\mathbb{R}$ on ne peut prendre que les racines carrées de nombres positifs ou nuls, car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.

Par exemple, résolvons l'équation

$$z^3 + 9z + 12 = 0 \quad (5.14)$$

On a $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 63$. La formule (5.13) donne $z \approx -1, 16$. Le graphe de $y = z^3 + 9z + 12$ est

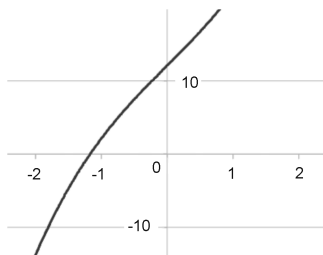


Figure 5.1 : Graphe de $y = z^3 + 9z + 12$, échelle des ordonnées dix fois plus grande que celles des abscisses.

Les mathématiciens du XVI^e siècle avaient diverses méthodes pour savoir que l'équation (5.14) n'avait pas d'autres solutions. Avec la représentation cartésienne, on voit que le point d'inflexion de la courbe, i.e. l'endroit à partir duquel sa pente recommence à croître est aux alentours de $z = 0$.

Exercice 5.1 : En utilisant le calcul différentiel qu'on a appris l'année dernière, montrer que l'abscisse du point d'inflexion est exactement $z = 0$.

Donc l'équation (5.14) n'a qu'une seule racine. On l'a trouvée. Tout va bien.

Problème avec la formule de Cardan

En fait, tout ne va pas aussi bien que ça. En effet, les mathématiciens italiens ont essayé la formule (5.13) avec beaucoup d'équations. Et ils se sont rendu compte qu'elle marchait même quand elle ne devrait pas ! Par exemple, ils l'ont utilisée pour l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (5.15)$$

Dans ce cas, on a $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121$. A priori la formule de Cardan ne peut pas être utilisée. On avait l'habitude avec les équations du second degré que parfois les formules (5.7) ne pussent pas être utilisées. Mais c'était quand l'équation trinôme (5.6) n'avait pas de solution du tout. Quand la géométrie analytique fut mise au point, cela correspondait au cas où la parabole $y = ax^2 + bx + c$ ne coupait pas l'axe des x . Tout était encore clair.

Cependant la courbe $y = x^3 - 15x - 4$ coupe l'axe des x en trois points. Autrement dit l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ a trois solutions.

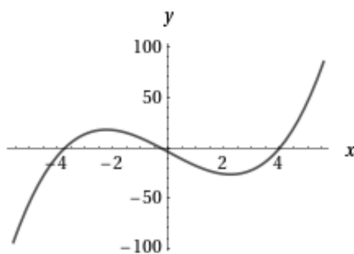


Figure 5.2 : Graphe de $y = x^3 - 15x - 4$.

Se pourrait-il que la formule de Cardan ne s'applique pas ? Mais sa construction est algébriquement impeccable. On peut d'ailleurs l'introduire dans l'équation (5.9). En faisant tous les calculs algébriques formellement, en considérant que le carré de $\sqrt{-1}$ vaut -1 , on peut voir que $z^3 + pz + q$ vaut bien zéro.

Se pourrait-il, à l'inverse, que la formule de Cardan marche ? En la simplifiant un peu, toujours formellement, elle vaut

$$\sqrt[3]{2 + 11 \times \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \times \sqrt{-1}} \quad (5.16)$$

Le problème, c'est la racine carrée de -1 . Le nombre donné par (5.16) pourrait-il être égal à l'une des trois racines réelles qu'on voit sur la fig. 5.2 ? Les mathématiciens n'avaient pas cette courbe, mais ils savaient – c'est facile à vérifier – que l'équation avait trois racines

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 - \sqrt{3} \\ x_2 &= -2 + \sqrt{3} \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Tout cela laissait perplexe. C'est Raffaele Bombelli (1526, 1572) qui déclara le plus clairement, en substance : « Considérons que la formule (5.13) est vraie même quand $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Faisons, désormais, tous nos calculs algébriques en incorporant quand c'est nécessaire le nombre $\sqrt{-1}$ qui a la propriété que son carré est égal à -1 . »

Bombelli est ainsi parfois crédité de l'invention des nombres complexes dont nous allons voir que la forme générale est

$$z = x + y\sqrt{-1} \quad (5.17)$$

où x et y sont des nombres réels. On montra en particulier que l'expression (5.16) valait 4.

Au vrai les mathématiciens restèrent très circonspects avec ces nouveaux nombres pendant des décennies. Mais l'utilisation du nombre $\sqrt{-1}$ – que rapidement on dénota simplement i pour « imaginaire » – permettait de faire toutes sortes de calculs qui ne débouchaient sur aucune contradiction. Mieux que cela, les nombres complexes se révélaient très utiles.

L'histoire de l'introduction des nombres complexes est exactement parallèle à celle de l'introduction des nombres négatifs dans

les calculs trois siècles plus tôt. Les praticiens se sont mis à utiliser les nombres négatifs de manière pragmatique³. Les mathématiciens sont restés très circonspects pendant des siècles. Encore à la fin du XVIe siècle, Viète utilisait les nombres négatifs dans ses calculs intermédiaires, mais s'arrangeait pour qu'ils disparaissent des résultats finaux. En 1600 on ne donnait ordinairement que les racines positives des équations.

Mais l'acceptation des nombres complexes fut relativement rapide. À la fin du XVIIe siècle, on avait compris qu'ils permettaient de représenter toutes les solutions de toutes les équations algébriques, même si on ne comprenait pas encore bien pourquoi. La clarification complète des nombres complexes prit un siècle, grosso modo entre 1700 et 1800. Mais leur utilisation pour résoudre toutes sortes de problèmes de mathématiques et de physique n'attendit pas aussi longtemps, et ils étaient d'usage courant au XVIIIe siècle.

Avant de passer à la présentation des propriétés des nombres complexes, concluons cette section historique en disant que dès 1600, les différents types de nombres qu'on connaissait permettaient de résoudre toutes les équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} a + x &= b \\ ax &= b \\ x^2 &= b \end{aligned}$$

quels que soient les nombres réels a et b .

On comprit rapidement, vers 1700, qu'on pouvait résoudre n'importe quelle équation algébrique avec des coefficients réels ou complexes,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \quad (5.18)$$

même si encore une fois la théorie des nombres complexes dût attendre environ 1800 pour devenir propre, impeccable et ne comportant plus aucune obscurité.

Les hommes s'étaient dotés de nouveaux nombres, comme ils l'avaient déjà fait avec les nombres entiers naturels au paléolithique, les fractions sous les Babyloniens, les nombres irrationnels avec Pythagore, et les nombres négatifs au début du second millénaire de notre ère.

3. En ce qui concerne les nombres négatifs, on peut dire que ce sont même les praticiens qui les ont inventés dans la comptabilité en partie double. Tandis que les nombres complexes ont indiscutablement été inventés par des mathématiciens avant de servir à quoi que ce soit.

L'ensemble des nombres complexes, comme l'on sait, est dénoté $\mathbb{C}$ et on peut encore étendre les inclusions présentées page 81 :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition et propriétés des nombres complexes

Un nombre complexe est un objet de la forme

$$x + iy \tag{5.19}$$

où i est une création ayant la propriété que

$$i^2 = -1 \tag{5.20}$$

et x et y sont des nombres réels.

De même que les nombres réels sont souvent notés avec les lettres x ou y , les nombres complexes sont souvent notés avec les lettres z ou w . On utilisera aussi les lettres a , b , c , etc. Le contexte permettra de savoir si on parle de nombres réels ou de nombres complexes.

Les nombres complexes, on l'a dit, ont longtemps laissé les mathématiciens intrigués, voire suspicieux que ce n'étaient pas de vrais objets mathématiques⁴. Ce n'est qu'au XIXe siècle qu'on a clairement compris que la notion de « vrai objet mathématique », par opposition à je ne sais quoi, faux objet, objet qui n'existe pas, objet dénué de sens, était une notion inutile. En effet jusqu'au XVIIIe siècle inclus les mathématiciens pensaient que les objets avec lesquels ils travaillaient étaient des représentations idéalisées, épurées, de choses concrètes qu'on pouvait voir dans la nature, des lignes droites, des triangles, des cercles, ou des nombres clairs comme les nombres entiers et ceux qui en dériveraient directement.

On a suffisamment dit que les nombres irrationnels avaient déstabilisé les membres de l'école de Pythagore.

Un premier pas vers l'abstraction avait été franchi avec les relations et les fonctions qui étaient devenues des objets mathématiques légitimes, alors qu'on ne peut pas « voir » une relation. Mais ça restait quand même relativement concret ou en tout cas compréhensible – ne serait-ce qu'avec l'invention de la géométrie analytique qui permettait de dessiner une relation.

4. On trouvait encore il y a quelques années des livres se voulant sérieux avec un titre du genre *Les nombres complexes n'existent pas*. Ils étaient de la même farine que ceux prétendant donner une démonstration de la quadrature du cercle, ou présentant les aspects magiques du nombre d'or.

Les nombres complexes furent un saut dans l'abstraction et l'inconnu bien plus important. D'ailleurs même les appeler des *nombres* semblait contestable.

Les nombres complexes n'ont pas peu contribué à conduire les mathématiciens vers la compréhension que ce sur quoi ils travaillaient d'une manière générale était des *structures* d'objets avec des axiomes et des règles. Les mathématiciens se sont éloignés au XIXe siècle du souci de parler de la nature. Paradoxalement, c'est aussi le siècle où les physiciens employant les nouveaux outils très abstraits de la boîte à outils mathématique, les nombres complexes, la géométrie non euclidienne, les espaces vectoriels construits sur les complexes, les structures non commutatives, ont fait des découvertes stupéfiantes : l'électricité, le magnétisme, la thermodynamique, et un peu plus tard la relativité et la mécanique quantique.

C'est d'ailleurs parce que les mathématiques étaient devenues très abstraites qu'Eugène Wigner a pu en 1960 s'étonner qu'elles marchent si bien pour décrire et agir sur la nature, aient « une efficacité déraisonnable » a-t-il dit.

Les nombres complexes étaient donc dès le départ des créatures incompréhensibles, et certainement pas des nombres ordinaires. On les a d'abord appelés « nombres imaginaires ». C'est Carl Friedrich Gauss (1777, 1855) qui a proposé le nom « nombre complexe » car il avait bien compris qu'ils n'étaient en réalité (sic) pas plus imaginaires que 1, 2 ou 3. C'était ni plus ni moins des objets servant à décrire le monde, comme les nombres entiers. Ils étaient simplement plus complexes.

Comme on les appelait des nombres, ne serait-ce qu'à cause de la façon dont on les avait découverts, on chercha longtemps, pendant les deux siècles et demi entre leur invention ou découverte et la fin du XVIIIe siècle, à les représenter, à leur trouver une description géométrique comme les nombres ordinaires de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$ sont tous disposés sur la droite des nombres. On en trouva une, comme le lecteur et la lectrice le savent sans doute. Nous allons y venir.

Opérations algébriques

Il y a au sein de l'ensemble des nombres complexes les deux opérations que sont l'addition et la multiplication. Les nombres complexes obéissent pour l'addition et la multiplication aux mêmes règles algébriques que les nombres ordinaires de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$.

Le nombre i est traité comme un autre nombre, ou un paramètre, et l'expression $x + iy$ est traitée comme le serait $a + bc$, où a , b et c sont réels.

En particulier le nombre i est traité par l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication, et la distributivité de la multiplication sur l'addition, comme un autre nombre. Ainsi on a

$$x + iy + u + iv = x + u + i(y + v) \quad (5.21)$$

et

$$(x + iy) \times (u + iv) = xu - yv + i(yu + xv) \quad (5.22)$$

On a vu que par définition $i^2 = -1$. Noter qu'on a aussi $(-i)^2 = -1$. De même que les nombres réels, les nombres complexes ont deux racines carrées opposées l'une de l'autre.

Il y a un nombre complexe nul, noté 0. On aurait pu aussi le noter $0 + i0$, mais on a sagement jugé que c'eût été ridicule.

Deux nombres complexes $x + iy$ et $u + iv$ sont égaux si et seulement si $x = u$ et $y = v$. Cela se démontre en observant que si $x + iy = u + iv$ alors $x - u = i(v - y)$. On peut prendre le carré de chaque côté puis faire passer le membre de droite vers la gauche, on obtient $(x - u)^2 + (v - y)^2 = 0$. Cette expression, qui ne fait intervenir que des nombres réels, est égale à zéro si et seulement si $x - u = 0$ et $y - v = 0$.

Quand on ajoute le nombre complexe nul à un nombre complexe $x + iy$ on obtient encore $x + iy$. Et quand on multiplie le nombre complexe nul, c'est-à-dire 0, par $x + iy$ on obtient 0.

Dans le langage de la théorie des groupes, 0 est encore l'élément neutre pour l'addition. De même 1 est encore l'élément neutre pour la multiplication. Nous parlerons des structures algébriques dans deux leçons. Nous verrons que, comme l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est un groupe pour l'addition et aussi pour la multiplication. Tous deux sont des corps algébriques. C'est aussi le cas de $\mathbb{Q}$, alors que ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$.

Le corps $\mathbb{C}$ est en outre un corps complet au sens algébrique du terme, c'est-à-dire que toute équation polynomiale y a une solution. L'équation polynomiale emblématique de $\mathbb{C}$ est $z^2 + 1 = 0$, qui a deux solutions dans $\mathbb{C}$, alors qu'elle n'en a pas dans $\mathbb{R}$.

Étant donné que $\mathbb{C}$ est un groupe pour la multiplication, on peut toujours diviser un nombre complexe par un nombre complexe non nul, on obtient un autre nombre complexe. On peut le vérifier de la manière suivante :

$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \quad (5.23)$$

Terminologie : Soit le nombre complexe $z = x + iy$.

Le nombre réel x s'appelle la partie réelle de z , et iy s'appelle sa partie imaginaire.

Le nombre $\sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module ou la norme de z . On l'appelle aussi parfois sa valeur absolue, et on note $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le nombre $x - iy$ s'appelle le complexe conjugué de z . Les mathématiciens le notent souvent $\bar{z}$. Les physiciens emploient surtout la notation z^* .

Propriété : le produit zz^* est le carré du module de z . C'est aussi le carré du module de z^* .

Représentation des nombres complexes

En 1799, le mathématicien danois Caspar Wessel (1745, 1818) a suggéré d'utiliser une représentation dans le plan quadrillé : à chaque complexe $a + ib$, on associe tout simplement le point de coordonnées (a, b) , ou si l'on préfère le vecteur de composantes (a, b) . L'article dans lequel il a exposé cette idée est passé inaperçu de la communauté des mathématiciens. Gauss y avait pensé aussi mais ne l'avait pas publié. Le mathématicien Jean-Robert Argand (1768, 1822) a eu la même idée peu après Wessel, et aujourd'hui on parle du « plan d'Argand » pour la représentation dans le plan des nombres complexes.

Par exemple, le nombre complexe $4 + 3i$ est représenté par le point M ci-dessous :

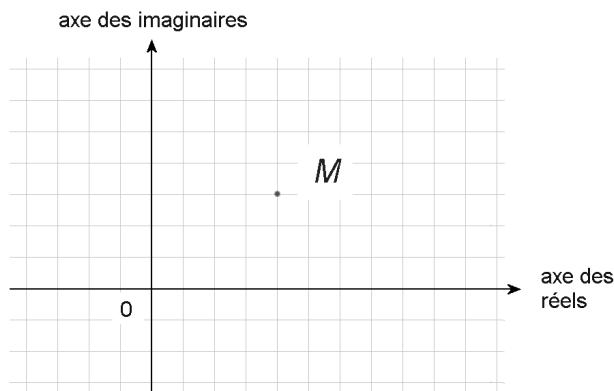


Figure 5.3 : Représentation du nombre complexe $4 + 3i$ par le point M dans le plan d'Argand.

Une partie des propriétés des nombres complexes sont simplement des propriétés banales des vecteurs dans le plan, et d'autres propriétés sont inattendues.

L'addition de deux nombres complexes correspond à l'addition de deux vecteurs. Il n'y a pas grand-chose de plus à en dire. Retourner étudier les espaces vectoriels que nous avons présentés dans nos livres de seconde et de première si nécessaire.

La multiplication de deux nombres complexes est plus intéressante.

Interprétation géométrique de la multiplication de deux nombres complexes

La multiplication de deux nombres complexes est une fonction qui à tout couple de nombres complexes associe un troisième nombre complexe. Mais la similitude avec les opérations sur les vecteurs s'arrête là.

Pour les vecteurs on a défini un produit, nommé produit scalaire (voir notre leçon sur le produit scalaire en première) qui à tout couple de vecteurs associe un nombre réel (c'est-à-dire un scalaire). Il existe aussi une autre fonction qui à tout couple de vecteurs associe un troisième vecteur, mais il est dans l'espace à trois dimensions, perpendiculaire aux deux premiers vecteurs. Cette fonction est appelée produit vectoriel. Elle sert beaucoup en physique, en particulier en mécanique et en électromagnétisme. Ni l'une ni l'autre cependant ne correspond au produit des nombres complexes.

Le produit de deux nombres complexes, d'un point de vue algébrique, n'a pas de mystère. On a vu plus haut mais répétons-le pour nous familiariser avec les diverses notations :

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$$

Il n'a pas de mystère, mais il a une interprétation géométrique admirable.

Pour la comprendre, commençons par un lemme.

Lemme : Soit u et v deux nombres complexes⁵. Alors le module du produit uv est égal au produit des modules de u et de v :

$$|uv| = |u| \cdot |v| \tag{5.24}$$

5. Attention, ici u et v ne sont plus respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe. Ce sont chacun un nombre complexe avec une partie réelle et une partie imaginaire.

Démonstration : Soit $u = a + ib$ et $v = c + id$. Alors on a

$$uv = ac - bd + i(bc + ad)$$

Donc on a aussi

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2adbc + (bc)^2 \end{aligned}$$

Les termes $-2acbd$ et $+2adbc$ s'éliminent. On arrive à

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= |u|^2 |v|^2 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On notera au passage que ça démontre aussi que si deux nombres entiers A et B sont chacun somme de deux carrés (prendre $A = a^2 + b^2$ et $B = c^2 + d^2$), alors leur produit est aussi un entier somme de deux carrés : $AB = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. C'est une observation qu'avait faite le mathématicien grec Diophante, qui vivait à Alexandrie au nord de l'Égypte au III^e siècle après J.-C. Quant à nous, nous utilisons cette identité pour des réels positifs quelconques. Mais l'invention des nombres complexes devait attendre encore quelques siècles après Diophante.

Regardons la multiplication de $m = 3,2 + i0,8$ par $u = 1,5 + i0,5$.

$$\begin{aligned} um &= 3,2 \times 1,5 - 0,8 \times 0,5 + i(3,2 \times 0,5 + 1,5 \times 0,8) \\ &= 4,4 + i2,8 \end{aligned}$$

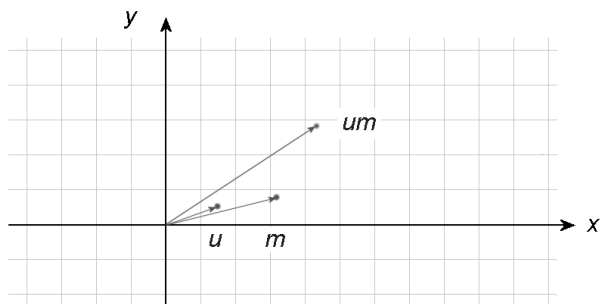


Figure 5.4 : Produit de $m = 3,2 + i0,8$ par $u = 1,5 + i0,5$.

On voit que le produit um , qui est égal à $4, 4+i2, 8$, a un module plus long que m et fait un angle plus grand avec l'axe des réels.

Exercice 5.2 : Quels sont les modules de u , m et um ?

En utilisant la trigonométrie, trouver quels sont les angles que font avec l'axe des x les nombres u , m et um ?

Aide : Utiliser la fonction arcsin, ou arccos ou arctan.

Dans la seconde moitié du XVI^e siècle, le mathématicien François Viète (1540, 1603) étudiait l'identité établie par Diophante. Et il l'interprétait comme une sorte de « produit de triangles rectangles » :

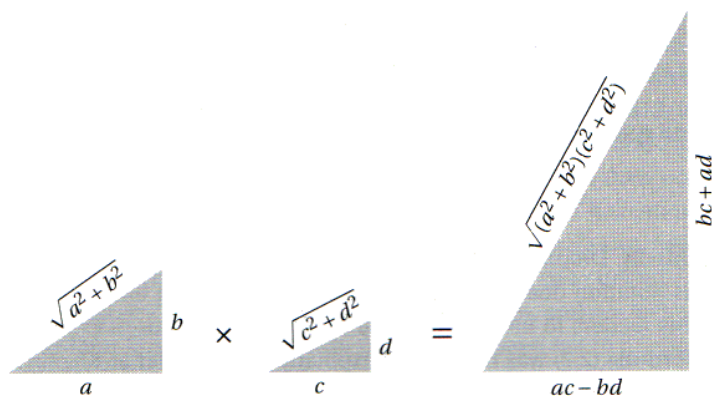


Figure 5.5 : Étude du « produit de triangles rectangles » par Viète.
Source : John Stillwell, *Yearning for the Impossible*, A.K. Peters, Ltd, 2006, page 36.

Viète s'aperçut et démontra que l'angle en bas à gauche du grand triangle est la somme des angles en bas à gauche des deux petits triangles.

Démonstration (avec des méthodes modernes) du résultat de Viète :

Considérons un nombre complexe u quelconque fixé, non nul, et étudions la multiplication par u .

Soit deux nombres complexes n et m . Appelons n' et m' les

résultats de la multiplication de n et de m par u . Alors on a montré que

$$|n' - m'| = |u(n - m)| = |u| \cdot |n - m| \quad (5.25)$$

C'est-à-dire que le vecteur correspondant à $n - m$ est transformé en un vecteur dont la norme a été multipliée par $|u|$.

Regardons le cas où le module de u est 1, ce que l'on note $|u| = 1$.

Dans ce cas, la transformation dans le plan qui consiste à multiplier par u préserve toutes les distances. De plus le point $(0, 0)$, ou de manière équivalente le nombre complexe 0, reste invariant.

Une transformation qui maintient tout le plan rigide, et un point fixe, est une rotation (combinée éventuellement avec un retournement du plan par une symétrie axiale).

Il est facile de voir ici, en choisissant deux complexes n et m particuliers, qu'il n'y a pas de symétrie axiale, qui inverserait le sens des figures.

Donc *la multiplication par u est une rotation autour du point O .*

Quelle rotation ?

Eh bien, observons que le vecteur $(1, 0)$, qui correspond au nombre complexe 1, est transformé en le vecteur correspondant à u . Donc il s'agit d'une rotation d'un angle égal à l'angle que fait u avec l'axe des réels.

C.Q.F.D.

Résumé : Théorème sur la multiplication des nombres complexes

La multiplication d'un nombre complexe $u = a + ib$ par un autre nombre complexe $v = c + id$, produit un troisième nombre complexe qui a pour module le produit des modules de u et v , et pour angle avec l'axe des réels la somme des angles avec l'axe des réels de $a + ib$ et de $c + id$.

Cas particuliers :

1. Quand $u = i$, la multiplication par u opère une rotation de 90° dans le sens positif (= sens contraire des aiguilles d'une montre) dans le plan d'Argand.
2. Quand $u = 1 + i$, la multiplication par u opère une rotation de 45° combinée avec une elongation de $\sqrt{2}$.

Exercice 5.3 : Multiplier $1/2 + i\sqrt{3}/2$ par $\sqrt{3}/2 + i/2$. Vérifier que le résultat est purement « imaginaire » (c.-à-d. de partie réelle nulle) et de module 1.

Expliquer pourquoi à l'aide de la géométrie des triangles équilatéraux et du résultat de Viète.

Représentation trigonométrique des nombres complexes

On dit aussi représentation *polaire* des nombres complexes.

Soit un nombre complexe

$$u = a + ib \quad (5.26)$$

Notons r son module, et θ l'angle qu'il fait avec l'axe des réels.

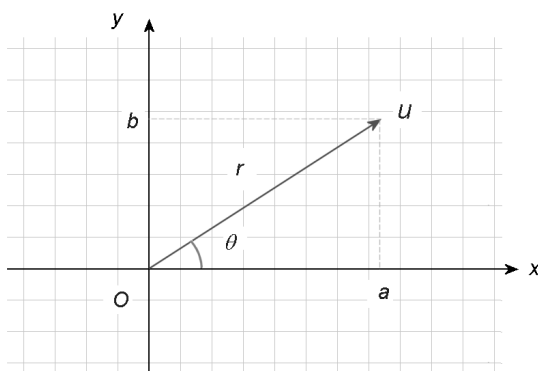


Figure 5.6 : Nombre complexe avec composantes trigonométriques : partie réelle $= r \cos \theta$, partie imaginaire $= r \sin \theta$ ⁶.

La formule (5.26) peut aussi s'écrire

$$u = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (5.27)$$

Terminologie : on a vu que r s'appelle le module de u . L'angle θ s'appelle son argument

6. Parfois on appelle « partie imaginaire » le nombre $ir \sin \theta$, parfois simplement le nombre $r \sin \theta$. Ça ne devrait pas créer de confusion.

Formules trigonométriques pour la somme de deux angles

Prenons deux nombres complexes u et v chacun de module 1.

Alors si θ est l'argument de u , et ϕ l'argument de v , on a

$$\begin{aligned} u &= \cos \theta + i \sin \theta \\ v &= \cos \phi + i \sin \phi \end{aligned} \quad (5.28)$$

On dispose maintenant de deux façons d'écrire le produit de u et v , avec l'algèbre élémentaire des nombres complexes, et avec le résultat de Viète.

Par l'algèbre élémentaire on a

$$uv = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi + i(\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi) \quad (5.29)$$

Et par le résultat de Viète on a

$$uv = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi) \quad (5.30)$$

Étant donné qu'un nombre complexe ne peut pas avoir deux parties réelles différentes, ni deux parties imaginaires différentes, on a démontré en trois coups de cuiller à pot que

$$\begin{cases} \cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\ \sin(\theta + \phi) = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \end{cases} \quad (5.31)$$

Conclusion

L'une des raisons pour lesquelles les physiciens et les mathématiciens ont tout de suite beaucoup utilisé les nombres complexes, dès le XVII^e siècle, bien avant d'avoir complètement élucidé tous leurs mystères, est, comme la démonstration ci-dessus l'illustre, qu'ils simplifient considérablement la vie.

On va voir aussi en algèbre que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a toujours deux solutions. On n'a plus à se soucier de discriminant. Et toute équation polynomiale de degré n a n racines.

Paradoxalement l'étude des fonctions et plus généralement l'analyse est plus simple avec les nombres complexes qu'avec les nombres réels. On verra que les fonctions $z \rightarrow f(z)$ de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes vers $\mathbb{C}$, même si elles sont plus difficiles à visualiser, sont plutôt plus simples que les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Les nombres complexes jouent un rôle fondamental aussi en physique. En physique classique ils sont indispensables en électromagnétisme. En physique quantique les états d'un système sont des éléments d'un espace vectoriel sur le corps des complexes.

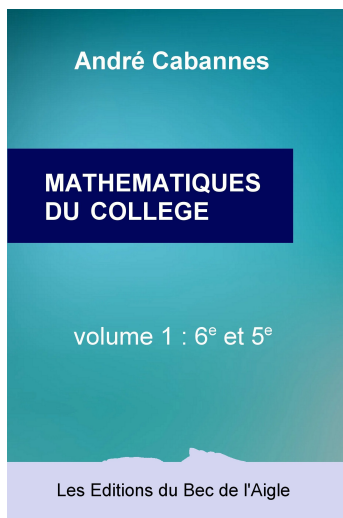
Et bien d'autres merveilles nous attendent dans les années qui viennent.

Suggestions de lecture

STILLWELL John, *Yearning for the Impossible*, A.K. Peters, Ltd, 2006

Catalogue des

ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE

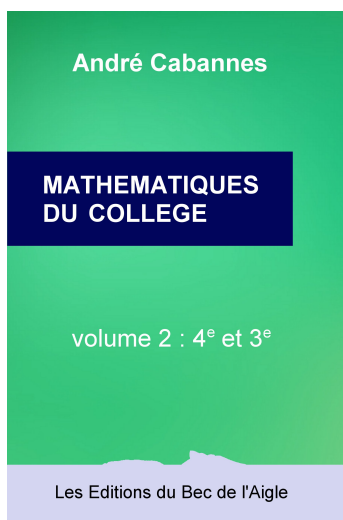


www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents

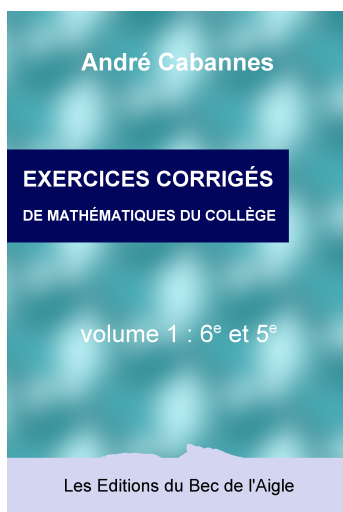


www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

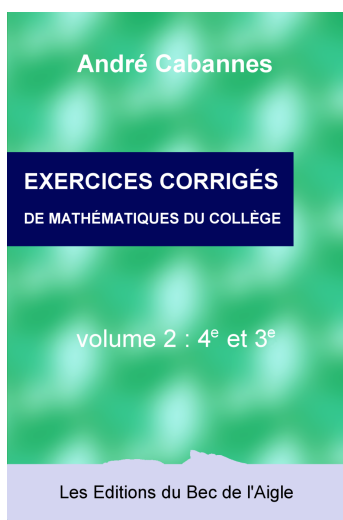
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2958738566

Maths du collège volume 1

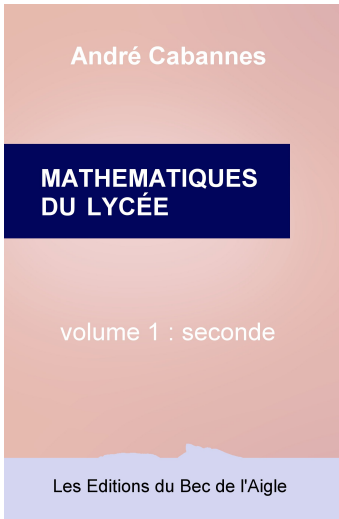
Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574

Maths du collège volume 2

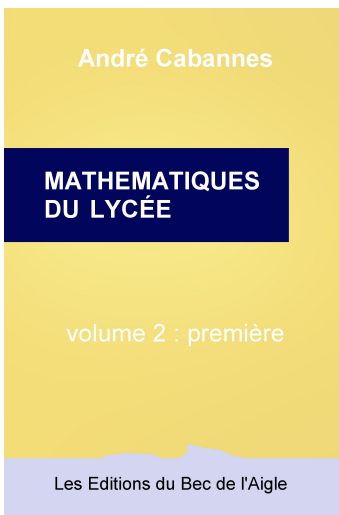
Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2957239183

Cours de mathématiques de seconde

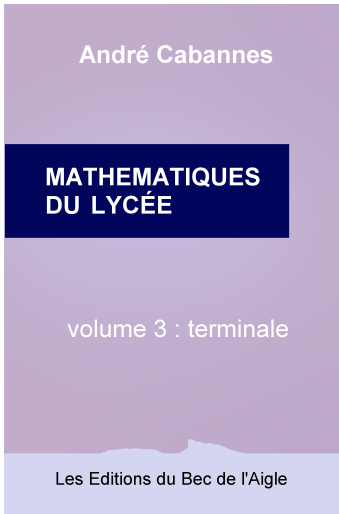
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191

Cours de mathématiques de première

à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2958738507

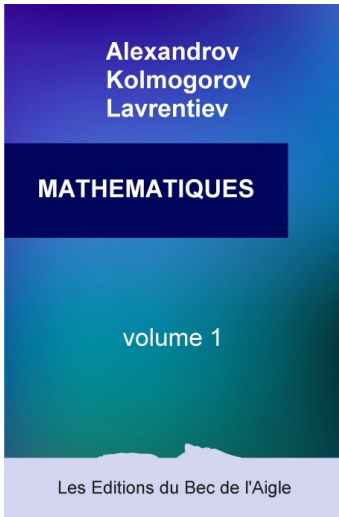
Cours de mathématiques de terminale

à l'intention des lycéens et de leurs parents



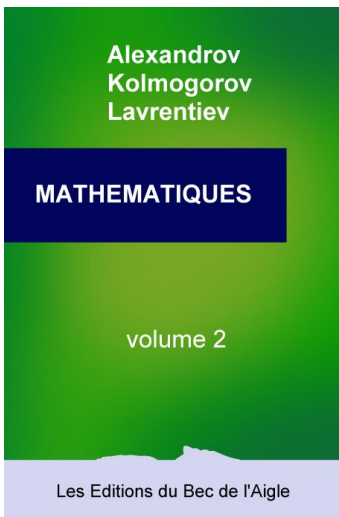
www.amazon.fr/dp/2957239140

Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



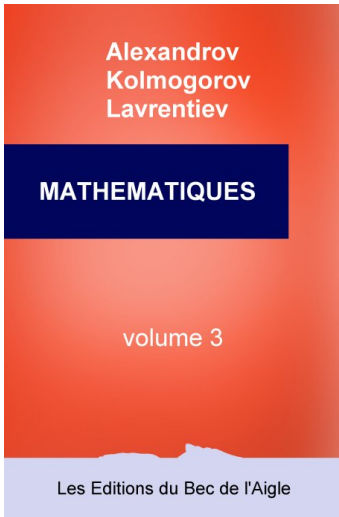
www.amazon.fr/dp/2957239124

Introduction aux mathématiques
(niveau baccalauréat)



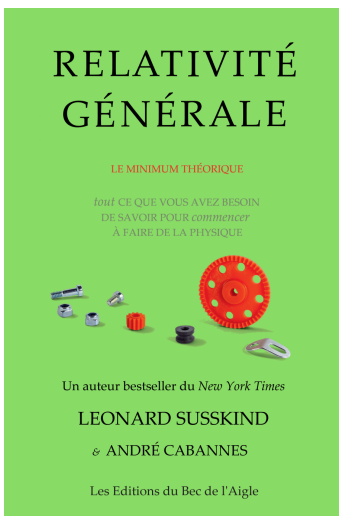
www.amazon.fr/dp/2957239116

Les mathématiques pour l'utilisa-
teur (niveau première année d'uni-
versité)



www.amazon.fr/dp/2957239132

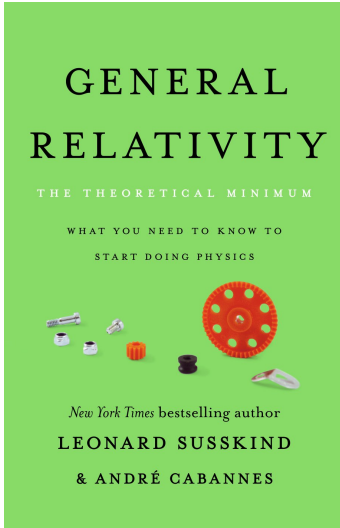
Les mathématiques pour l'étudiant
spécialisé et le chercheur (niveau li-
cence)



www.amazon.fr/dp/2957239175

Cours de physique
(niveau maîtrise)

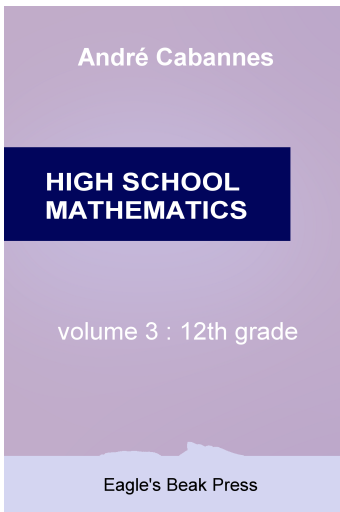
English titles by André Cabannes



www.amazon.com/dp/B09ZB613QY

General Relativity

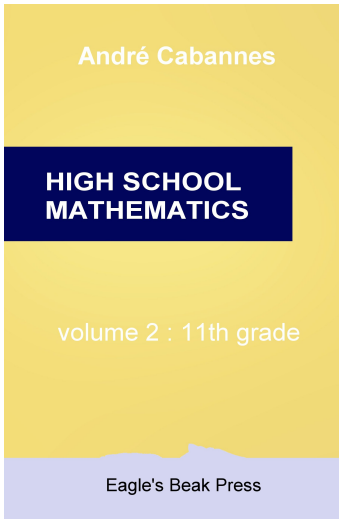
Graduate studies.



www.amazon.com/dp/2958738515

High school mathematics

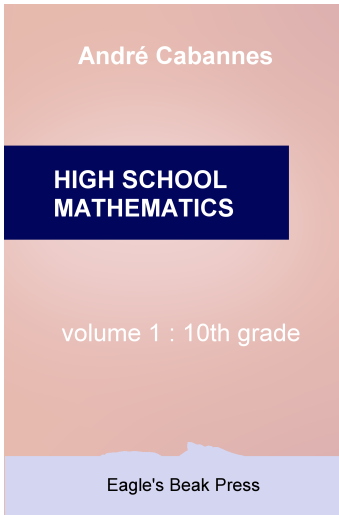
Volume 3 : 12th grade



www.amazon.com/dp/2958738523

High school mathematics

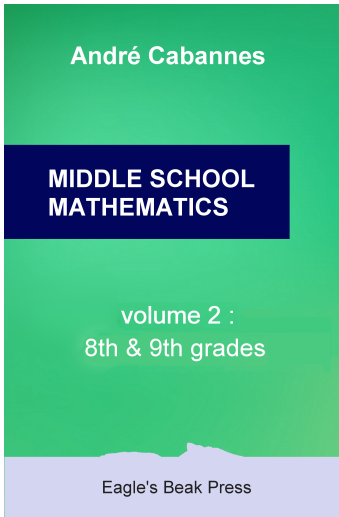
Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531

High school mathematics

Volume 1 : 10th grade

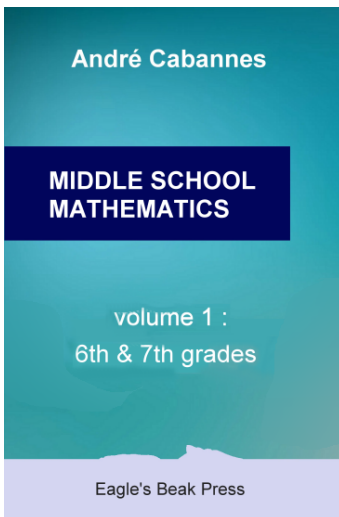


www.amazon.com/dp/295873854X

Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and
their parents



www.amazon.com/dp/2958738558

Middle school mathematics

Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and
their parents