Partie I : Classe de Quatrième

Contenu :

I.17 Triangles : théorème de Thalès

I.17.1 Introduction

Nous arrivons au théorème de Thalès que est le résultat de géométrie le plus important de tout le collège. Il permet de comparer très simplement des longueurs.

L'autre résultat de géométrie important au collège est le théorème de Pythagore, qu'on étudiera dans deux leçons. Il est lié aux notions de perpendicularité, d'aire et de longueur aussi.

Le théorème de Thalès sert dans la vie de tous les jours car il est d'utilisation très simple et intuitive, tandis que celui de Pythagore sert surtout en mathématiques où il est à la base des calculs de distance dans un repère cartésien.

Le théorème de Thalès énonce quelque chose que tout le monde connaît depuis l'enfance, montré sur la figure I.17.1 :

Si les trois angles du triangle ABC sont égaux aux trois angles du triangle DEF, alors les triangles ont la même forme, et les trois ratios suivants sont égaux

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{I.17.1}$$

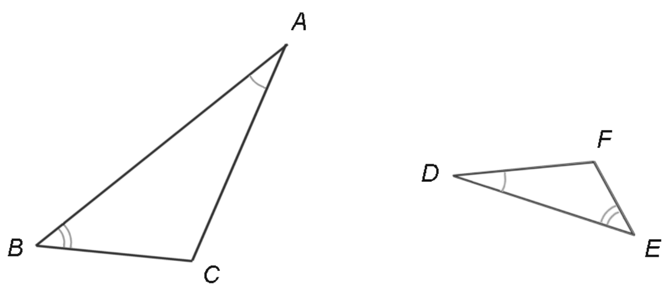


Figure I.17.1 : Deux triangles ayant les mêmes angles ont « la même forme » et satisfont le théorème de Thalès, c'est-à-dire la formule (I.17.1).

Énoncé de manière plus informelle :

Dans deux figures de même forme à des échelles différentes, toutes les proportions sont conservées.

À vrai dire, ce résultat est tellement fondamental que, sans lui, la géométrie qu'on peut faire reste du niveau du début de l'école primaire, aussi l'avons-nous déjà démontré dans la leçon 24 du cours de Sixième (partie I du volume 1).

Nous l'avons d'abord démontré pour un triangle et un autre triangle identique au premier à l'échelle moitié. Sur la figure I.17.2, on a emboîté le deuxième triangle dans le premier, de sorte que les lettres A et D coïncident. Nous avons alors montré que le segment médian EF est parallèle au segment BC et de longueur moitié.

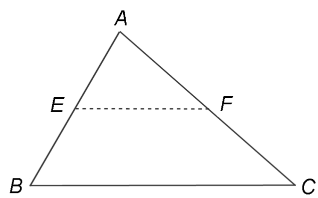


Figure I.17.2 : Le segment médian EF est parallèle au côté BC (car les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux) et de longueur moitié.

Pour notre démonstration, nous avons raisonné sur la figure (I.17.3) qui montre que le triangle ABC peut être vu comme l'assemblage de quatre triangles identiques de dimension moitié.

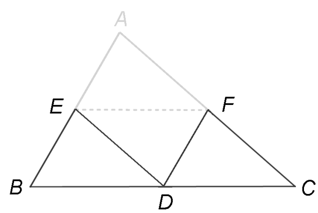


Figure I.17.3 : Figure utilisée pour montrer que EF est parallèle à BC et de longueur moitié.

Puis nous sommes passés à un segment découpant les côtés AB et AC au tiers en partant de A (exercice I.24 2 du volume 1), en décomposant le triangle ABC en neuf triangles identiques trois fois plus petits.

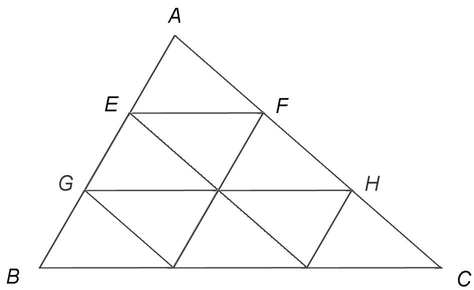


Figure I.17.4 : Figure utilisée pour montrer que EF est parallèle à BC et de longueur un tiers.

Observons que la formule (I.17.1) s'applique aussi au segment GH où G et H découpent les segments AB et AC au deux tiers.

Enfin nous avons généralisé (exercice I.24.3 du volume 1) à une proportion p/q quelconque.

Techniquement on peut faire observer qu'on ne l'a pas démontré pour une proportion qui est égale à un nombre réel quelconque qui peut être un irrationnel.

On pourrait le faire aussi en utilisant le fait que n'importe irrationnel peut être approché aussi près qu'on veut par un rationnel, mais nous allons plutôt regarder la façon dont Euclide a démontré le théorème de Thalès dans son célèbre livre *Éléments*.

I.17.2 Note sur notre façon d'enseigner les mathématiques

Avant de passer à Euclide, faisons une note sur notre façon d'enseigner les mathématiques, en particulier d'aborder la géométrie dans nos deux volumes du collège.

Premièrement, on ne peut pas faire de géométrie intéressante en Sixième et Cinquième sans utiliser les propriétés intuitives des proportions, bien que le théorème de Thalès qui les formalise soit seulement au programme de la classe de Quatrième. C'est pourquoi nous l'avons démontré dès la Sixième.

Alors ensuite on peut utiliser de temps à autre la propriété que sur la figure I.17.5, on a

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE'}{DF'} = \frac{DE}{DF} = \frac{E'E}{F'F} = \frac{p}{q} \tag{I.17.2}$$

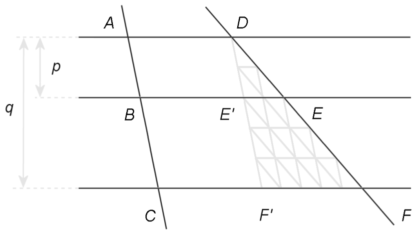


Figure I.17.5 : $\frac{AB}{AC} = \frac{DE'}{DF'} = \frac{DE}{DF} = \frac{E'E}{F'F}$. Sur la figure cela fait $\frac{2}{5}$.

Deuxièmement, on ne peut pas non plus faire de mathématiques intéressantes sans utiliser de temps à autre la notion intuitive de limite. Par exemple, n'importe quel écolier acceptera que la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ ait pour limite 2 si on lui montre l'empilage de carrés et de rectangles suivant :

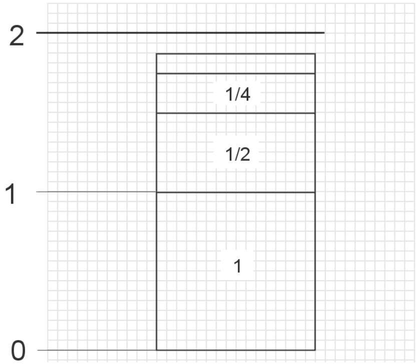


Figure I.17.6 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 2$.

Troisièmement, notre objectif est de montrer que les mathématiques sont utiles. C'est une boîte à outils dans la vie de tous les jours.

Aussi n'avons-nous pas hésité à faire des calculs numériques pour obtenir une solution quand les calculs algébriques étaient trop compliqués pour notre niveau, voire infaisables même pour les mathématiciens professionnels.

Comme nous l'avons dit page 73, dans l'esprit du grand public les mathématiques sont associées à l'idée de calculs algébriques formidables conduisant à des formules d'une complexité extraordinaire. Certes il y a en mathématiques des calculs algébriques parfois impressionnants mais ce n'est pas l'essence des mathématiques. L'essence des mathématiques c'est de fournir des outils pour décrire le monde et agir dessus. Toute méthode démontrée comme correcte est acceptable. L'élégance quand elle est possible est naturellement plaisante. Quant à la virtuosité, nous la laissons aux violonistes jouant du Paganini (1782-1840). Nous préférons quant à nous l'aria de Bach (1685-1750).

I.17.3 Démonstration du théorème de Thalès donnée par Euclide dans le livre *Éléments*

Nous partons des deux triangles montrés sur la figure I.17.1, mais qu'on a emboîtés comme ci-dessous car c'est plus simple pour raisonner.

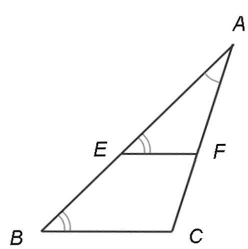


Figure I.17.7 : Deux triangles de même forme, mais à des échelles différentes.

Le théorème de Thalès établit que les 3 côtés du petit triangle et du grand triangle sont dans la même proportion. C'est exprimé par la formule (I.17.1) reproduite ci-dessous avec D remplacé par A puisqu'on a emboîté les deux triangles[1] :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \tag{I.17.3}$$

La démonstration donnée par le mathématicien grec Euclide (c. -325, c. -275) s'appuie astucieusement sur les surfaces (= aires) de différents triangles.

On va s'intéresser aux triangles BEF et CEF :

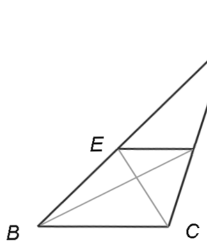


Figure I.17.8 : Démonstration par Euclide du théorème de Thalès.

Étape 1 : Les surfaces des deux triangles, BEF et CEF, sont égales, car ils ont la même base EF et la même hauteur (= la distance entre les deux segments parallèles EF et BC).

Étape 2 : Regardons maintenant les triangles AEF et ABF. Ils ont le même sommet E, et la même hauteur h issue de F. Donc leurs surfaces sont dans la proportion AE sur AB.

Insistons : surface (=aire) de $AEF = AE \times h \times 1/2$ et surface de $ABF = AB \times h \times 1/2$.

1. Noter que nous regardons chaque fois la proportion entre un côté du grand triangle et son homologue du petit triangle. Et nous montrons qu'elles sont égales.

Cela a pour conséquence aussi que la proportion AB/AC, calculée au sein du grand triangle, a la même valeur que son homologue, AE/AF calculée au sein du petit triangle.

Nous le laissons comme exercice d'algèbre élémentaire.

Donc on a bien l'égalité :

$$\text{surface de } AEF = \frac{AE}{AB} \times \text{surface de } ABF \qquad \text{(I.17.4)}$$

Étape 3 : La même chose est vraie avec les triangles AEF et AEC :

Donc on a aussi l'égalité :

$$\text{surface de } AEF = \frac{AF}{AC} \times \text{surface de } AEC \qquad \text{(I.17.5)}$$

Maintenant observons que la surface de ABF est la même que la surface de AEC, car c'est dans les deux cas la somme de la surface de AEF et de l'un des deux petits triangles, BEF ou CEF sous le segment EF, qui ont eux aussi la même surface.

Des égalités (I.17.4) et (I.17.5) on déduit que

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \qquad \text{(I.17.6)}$$

Reste à démontrer que c'est aussi le ratio des longueurs des deux segments EF et BC. L'idée d'Euclide ici est d'emboîter à nouveau le petit triangle DEF de la figure I.17.1 dans le grand triangle ABC. Mais cette fois-ci au lieu de faire coïncider A et D, on va faire coïncider C et F.

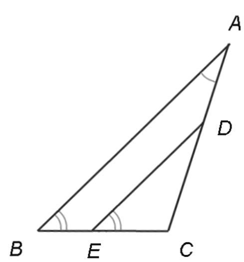


Figure I.17.9 : Démonstration par Euclide du théorème de Thalès (suite).

On démontre comme précédemment que la proportion EF (noté maintenant EC) sur BC est égale à la proportion CD sur CA. Et on observe que CD, sur la figure I.17.9, a la même longueur que AF sur la figure I.17.7. Cela démontre que sur la figure I.17.7 on a aussi

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} \tag{I.17.7}$$

Et cela conclut la démonstration de l'égalité des trois proportions

$$\frac{AB}{DE}, \quad \frac{AC}{DF} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{EF}$$

sur la figure initiale I.17.1.

Ce résultat, exprimant des proportionnalités fondamentales dans deux triangles de même forme, sert fréquemment, sans même qu'on y pense, dans la vie quotidienne.

Nous avons expliqué pourquoi nous l'avions déjà démontré en classe de Sixième (leçon I.24 du volume 1) par une autre méthode et utilisé à plusieurs reprises dans les leçons précédentes, en particulier sous la forme du résultat de « la droite des milieux » appelée aussi « segment médian » qui est un cas particulier avec le rapport un demi.

Thalès l'avait utilisé pour mesurer la hauteur de la pyramide de Khéops en comparant deux triangles formés par l'ombre de la pyramide et l'ombre de sa canne (cf. leçon II.6, opérations avec les fractions, du cours de Cinquième, partie II du volume 1).

I.17.4 Un commentaire iconoclaste sur Euclide

Euclide a introduit en mathématiques l'exposition rigoureuse de la géométrie à partir d'axiomes et avec des démonstrations logiques impeccables. Pour cette raison, son livre *Éléments* a connu la plus grande carrière qu'ait connue un livre dans l'histoire mondiale après la Bible.

Mais on notera aussi qu'il a introduit l'idée que « les maths c'est compliqué » et ésotérique – idée qui contribue à détourner nombre d'élèves des mathématiques et contre laquelle nous nous élevons fermement.

On conviendra, nous semble-t-il, que la démonstration par Euclide du théorème de Thalès en s'appuyant sur les aires de différents triangles extraits de la figure ci-dessous

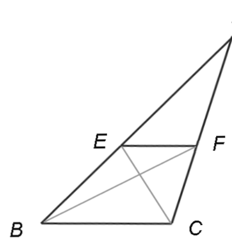


Figure I.17.10 : Démonstration par Euclide du théorème de Thalès.

est beaucoup plus compliquée que celle qui consiste à voir que sur la figure suivante

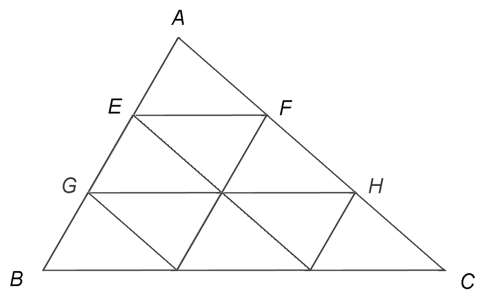


Figure I.17.11 : Notre démonstration du théorème de Thalès.

le segment EF est parallèle au segment BC et de longueur $1/3$ de celle de BC.

La démonstration d'Euclide est correcte, mais emberlificotée et obscure. La nôtre, qui est d'une simplicité biblique, montre ce qui se passe et est lumineuse.

I.17.5 Réciproque du théorème de Thalès

Dans la mesure où le théorème de Thalès établit plusieurs faits, il y a plusieurs énoncés qui portent le nom de « réciproque du théorème de Thalès ».

Ce qu'on appelle le plus souvent « la réciproque du théorème de Thalès » énonce que si sur la figure ci-dessous

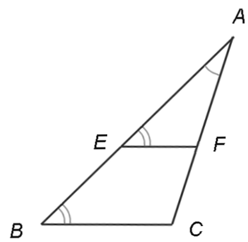


Figure I.17.12 : Réciproque du théorème de Thalès.

on a placé un point E n'importe où entre A et B et tracé la droite parallèle à BC passant par E, alors le point d'intersection F entre cette droite parallèle et le segment AC a la propriété que

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \tag{I.17.8}$$

Sa démonstration est laissée en exercice.

Exercice I.17.1 : Dessiner deux triangles de même forme mais de tailles différentes, et vérifier avec une règle graduée le théorème de Thalès.

Exercice I.17.2 : Si deux enfants ont les mêmes proportions, les mains du plus grand, quand il tient ses bras le long du corps, arriveront-elles plus haut ou plus bas que celles du petit enfant ?

Exercice I.17.3 : Sur la figure I.17.13,

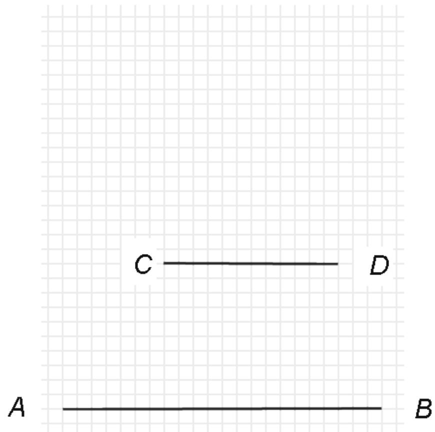


Figure I.17.13 : Quatre sommets d'un trapèze.

les points A, B, C et D, ont pour coordonnées respectives

$$A = (0,\ 0) \qquad B = (22,\ 0)$$
$$C = (7,\ 10) \qquad D = (19,\ 10)$$

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des droites AC et BD ?

Exercice I.17.4 : Sur la figure précédente, on fait bouger C et D en maintenant leur distance constante, et aussi leur ordonnée commune constante. Appelons x l'abscisse de C (et donc $x + 12$ celle de D).

1. Expliquer pourquoi, quand on fait varier x, l'ordonnée du point d'intersection de AC et BD ne change pas.
2. Exprimer l'abscisse de ce point d'intersection en fonction de x.

Exercice I.17.5 : On fixe le point A du pantographe représenté ci-dessous sur une planche à dessin.

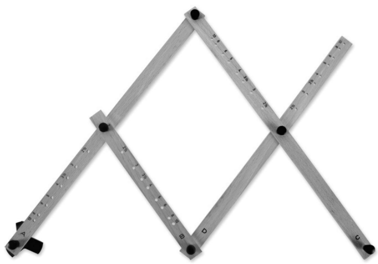


Figure I.17.14 : Pantographe. Source : Site `https://www.geant-beaux-arts.fr/`

Au point C on fixe un crayon. Et avec le point B on suit soigneusement un dessin fixé aussi sur la planche.

1. Montrer que le crayon en C reproduit le dessin à l'échelle double..
2. Comment concevriez-vous le pantographe pour qu'il reproduise le dessin en quatre fois plus grand ?
3. Comment concevriez-vous le pantographe pour qu'il reproduise le dessin en cinq fois plus grand ?

Exercice I.17.6 : Démontrer la formule (I.17.2) sur la figure I.17.5 à partir de la formule (I.17.1) sur la figure I.17.1.

Exercice I.17.7 : Théorème de Varignon. Soit un quadrilatère quelconque $ABCD$ et M, N, P, Q les milieux des quatre côtés. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

I.18 Angle au centre et angle inscrit dans un cercle.

I.18.1 Introduction

On peut dire que jusqu'ici nous avons exposé des résultats d'arithmétique et de géométrie plutôt intuitifs, voire évidents. Mais il fallait bien poser les bases pour être en mesure d'aller loin. En arithmétique, il était fondamental de bien comprendre la différence entre le concept abstrait de nombre et les différentes façons de noter les nombres. Il est fondamental de comprendre que 10 en système à base dix note dix, et en système à base deux note deux. En système à base douze, 1A note vingt-deux. En géométrie, il fallait bien comprendre le plan, les triangles, les droites parallèles, etc. La plupart des résultats qu'on a exposés étaient aussi plus ou moins intuitifs et évidents. Nous rangeons dans cette catégorie le théorème de Thalès. À partir de maintenant, cela va changer.

Dans la suite de ce cours de collège, les résultats qu'on va présenter, sans être difficiles, seront de moins en moins évidents intuitivement. Nous pensons que, sans les rendre encore ardues, cela rendra les mathématiques plus intéressantes.

Nous allons commencer avec les concepts d'angle au centre et d'angle inscrit dans un cercle. Le premier cas de figure correspond aux triangles rectangles.

I.18.2 Triangle rectangle et son cercle circonscrit

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse (c'est-à-dire le grand côté) du triangle est un diamètre du cercle circonscrit.

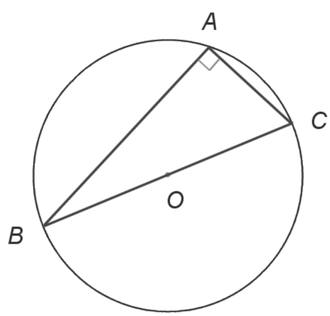


Figure I.18.1 : Triangle rectangle et son cercle circonscrit.

Pour l'instant c'est encore un résultat évident :-) Mais dans la section suivante on va le généraliser en un résultat qui l'est moins.

Pour être complet, démontrons le résultat sur le triangle rectangle. Une façon de le faire est de tracer les médiatrices des segments AB et AC, et de montrer qu'elles se coupent au milieu de l'hypoténuse. Le milieu de l'hypoténuse est donc le centre du cercle circonscrit.

Exercice I.18.1 : Montrer que sur la figure I.18.1 représentant un triangle rectangle et son cercle circonscrit les médiatrices de AB et AC se coupent au milieu de l'hypoténuse.

Maintenant voyons le segment BC comme l'angle plat $\widehat{BOC}$. Rappel : un angle plat est un angle de 180°, c'est-à-dire un angle dont les deux « branches » sont alignées.

Par ailleurs, l'angle $\widehat{BAC}$ fait bien sûr 90°. Donc l'angle $\widehat{BAC}$ est la moitié de l'angle $\widehat{BOC}$.

Eh bien nous allons démontrer que c'est vrai même quand le triangle ABC est un triangle quelconque et que les points B et C ne sont plus diamétralement opposés.

I.18.3 Triangle quelconque et son cercle circonscrit : résultat sur l'angle au centre et l'angle inscrit

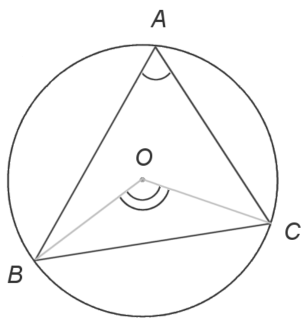


Figure I.18.2 : Triangle quelconque. Angle au centre $\widehat{BOC}$ et angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Le résultat général s'énonce comme ceci :

Considérons trois points A, B et C et le cercle circonscrit au triangle qu'ils forment, figure I.18.2. Alors l'angle au centre $\widehat{BOC}$ est toujours le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Dans la section précédente on l'a démontré dans le cas où les trois points A, B et C forment un triangle rectangle. Montrons-le maintenant dans le cas général.

Noter que la configuration de la figure I.18.2 n'est qu'un des cas de figure possibles. C'est un cas où le centre O est dans le triangle. La figure I.18.3 montre un autre cas, quand le centre O est en dehors du triangle.

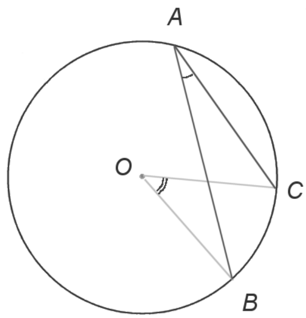


Figure I.18.3 : Angle au centre $\widehat{BOC}$ et angle inscrit $\widehat{BAC}$. Cas de figure où le centre du cercle circonscrit est en dehors du triangle ABC. Pour bien faire ressortir qu'il s'agit d'un résultat sur des angles dans un cercle, on n'a pas dessiné le côté BC du triangle ABC.

I.18.4 Démonstration du résultat général

On procède en deux temps.

D'abord on va regarder le cas de figure où A, O et B sont alignés. Mais on ne va plus être en train de regarder l'angle inscrit droit (angle en C sur la figure I.18.4). C'est un des deux autres angles qui est l'angle inscrit qui nous intéresse (angle en A sur la figure I.18.4).

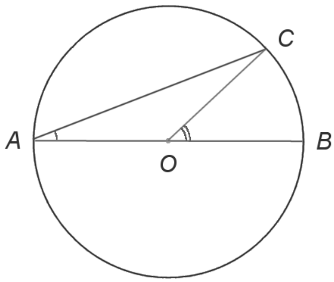


Figure I.18.4 : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ interceptant l'arc BC est égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc.

Démontrons sous forme d'exercice que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ interceptant l'arc BC est égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc.

> **Exercice I.18.2** : Dans le cas de figure I.18.4, considérer le triangle ABC.
>
> 1. Montrer que le triangle AOC est isocèle.
> 2. En déduire que les angles $\widehat{OAC}$ et $\widehat{OCA}$ sont égaux.
> 3. Montrer que l'angle $\widehat{AOC}$ est égal à 180° moins le double de l'angle $\widehat{OAC}$.
> 4. En déduire que
>
> $$\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC} \tag{I.18.1}$$
>
> C.Q.F.D.

Maintenant regardons le cas où A, O et B ne sont pas alignés. On va encore distinguer deux cas de figure.

Cas 1 : O est à l'intérieur du triangle ABC.

Il suffit d'observer qu'on peut se ramener à deux fois le cas de figure précédent : d'une part, dans le triangle $AA'C$ l'angle au centre interceptant l'arc $A'C$ est le double de l'angle inscrit interceptant le même arc ; et d'autre part, c'est vrai aussi dans le triangle $AA'B$ avec l'arc $A'B$.

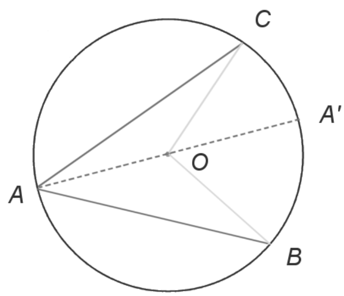


Figure I.18.5 : L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ interceptant l'arc BC est encore égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc.

Alors la somme des deux angles inscrits est forcément la moitié de la somme des deux angles au centre.

<u>Cas 2</u> : O est à l'extérieur du triangle ABC.

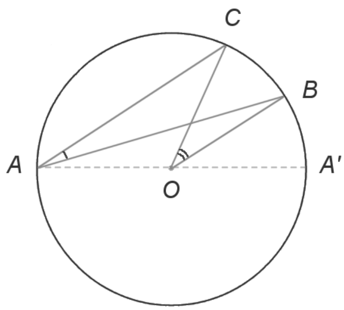


Figure I.18.6 : Cas de figure où le centre O est en dehors du triangle ABC. L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ interceptant l'arc BC est encore égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant le même arc.

La démonstration est du même genre et laissée en exercice.

Exercice I.18.3 : Sur la figure I.18.6, montrer que l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptant l'arc BC est égal au double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ interceptant le même arc.

Aide : S'inspirer de la démonstration donnée dans le cas de figure I.18.5.

Exercice I.18.4 : À l'aide d'une règle, un compas et un rapporteur, vérifier avec des constructions soigneuses les différents résultats de cette leçon.

Exercice I.18.5 : Expliquer pourquoi un angle inscrit a toujours pour mesure en degré la moitié de la longueur de l'arc qu'il intercepte multipliée par $360 \div 2\pi$.

Exercice I.18.6 : On considère le quadrilatère quelconque $ABCD$ inscrit dans un cercle. On suppose que l'on connaît les trois angles α, β et γ.

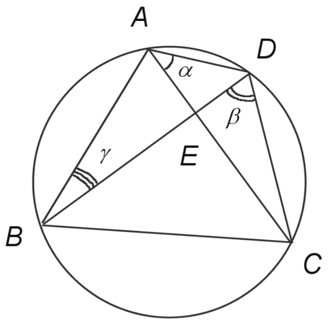


Figure I.18.7 : Quadrilatère inscrit. Et trois angles connus.

Montrer qu'on peut calculer tous les autres angles sur la figure.

I.19 Triangles rectangles : théorème de Pythagore

I.19.1 Introduction

Nous arrivons au célèbre théorème de Pythagore. Avec le théorème de Thalès et quelques autres résultats, il fait partie des outils mathématiques les plus importants qu'on apprend au collège. Toute personne ayant reçu une instruction primaire et secondaire doit connaître et savoir comment on utilise le théorème de Pythagore.

On l'appelle parfois le « Pont aux ânes ». L'explication donnée par les lexicographes est qu'il est facile à démontrer – ce que nous allons effectivement voir – et seulement les ânes ne peuvent pas comprendre sa démonstration – ce qui est une observation très éloignée de notre pédagogie.

Le théorème de Pythagore est un résultat sur les triangles rectangles. Avant de le présenter, rappelons une propriété satisfaite par tous les triangles.

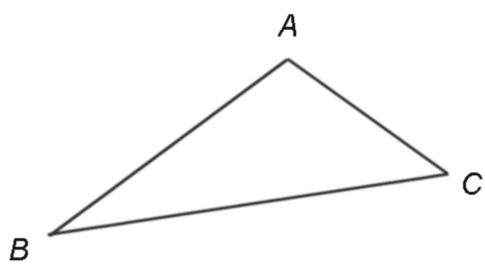


Figure I.19.1 : Triangle ABC quelconque.

Dans un triangle ABC quelconque, on a toujours

$$BC \leq AB + AC \tag{I.19.1}$$

C'est une vérité géométrique de base. C'est d'ailleurs, dans une certaine approche géométrique abstraite et très générale, un des axiomes de ce qu'on appelle une métrique qui à toute paire d'éléments (ici de points) associe un nombre positif.

I.19.2 Théorème de Pythagore et démonstration la plus courante

Il concerne donc les triangles rectangles.

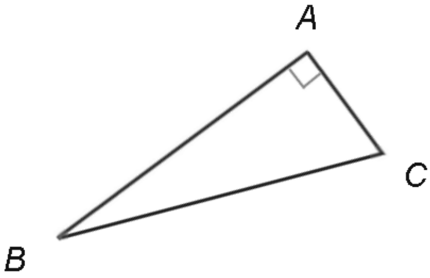


Figure I.19.2 : Triangle ABC rectangle en A.

Si dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, alors on a l'égalité suivante sur les carrés des longueurs des côtés

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \tag{I.19.2}$$

C'est une relation a priori étonnante, mais dont la démonstration est remarquablement simple.

Cette relation (I.19.2) a des conséquences très importantes dans toutes les mathématiques élémentaires, et même, dans une interprétation plus générale, dans toutes les mathématiques supérieures.

Contrairement au théorème de Thalès qui est visuellement évident, le théorème de Pythagore n'est pas visuellement évident. On peut dire que c'est le premier résultat géométrique non évident dans toute l'histoire des mathématiques [2].

Il va nous permettre de calculer n'importe quelle distance très commodément.

---

2. Thalès (c. -625, c. -545) vécut à Milet en Ionie (sur la côte occidentale de la Turquie actuelle). Pythagore est né vers -580 sur l'île de Samos en mer Égée, mais vécut à partir de -535 en Grande Grèce (nom donné au pied de la botte italienne plus la Sicile), principalement à Crotone. Il mourut vers -495 à Métaponte.

On le démontre, par exemple, à l'aide de la construction géométrique suivante [3] :

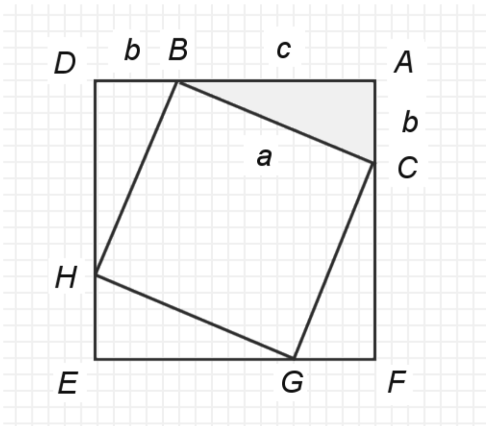


Figure I.19.3 : Démonstration du théorème de Pythagore.

Construction : on part du triangle rectangle initial ABC, que par commodité on a positionné en haut à droite, tourné de sorte que les côtés AB et AC soient parallèles respectivement à l'horizontale et à la verticale.

Les longueurs des trois côtés du triangle ABC sont dénotées a pour l'hypoténuse, et b et c pour les deux autres côtés.

Sur l'hypoténuse du triangle ABC, on a construit le carré central incliné $BCGH$ de côté a.

Et on a placé trois autres triangles identiques à ABC contre les trois autres côtés du carré central. Alors le quadrilatère $ADEF$ est aussi un grand carré de côté $b + c$.

Calcul de la surface (= aire) du grand carré $ADEF$: Le grand carré $ADEF$ est l'assemblage, comme dans un puzzle ou un tangram, de cinq éléments qui ne se chevauchent pas : le carré central $BCGH$ plus quatre triangles identiques à ABC.

3. Par un effet d'optique, on a l'impression que le carrée $ABCD$ est légèrement incliné vers la gauche, mais ce n'est pas le cas.

On peut donc exprimer la surface du grand carré $BCGH$ avec deux formules différentes, qui doivent forcément donner le même résultat : d'une part c'est la surface d'un carré de côté $b+c$; d'autre part c'est la somme des surfaces de ses cinq composantes, puisqu'elles ne se chevauchent pas. On a donc

$$(b+c)^2 = a^2 + 4 \times \frac{bc}{2} \tag{I.19.2}$$

Le terme de gauche est le calcul habituel de la surface d'un carré appliqué au grand carré. À droite, a^2 est la surface du carré central, et $bc/2$ est la surface du triangle rectangle ABC, qui est donc multipliée par 4.

La formule (I.19.2) se réécrit

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

Le terme produit s'annule et on arrive à

$$b^2 + c^2 = a^2 \tag{I.19.3}$$

C.Q.F.D.

I.19.3 Autres démonstrations

Le théorème de Pythagore est tellement important en géométrie ordinaire – appelée aussi *géométrie euclidienne* – que les gens se sont amusés à trouver des centaines d'autres démonstrations [4].

Voici l'une de nos favorites pour son élégance et sa brièveté :

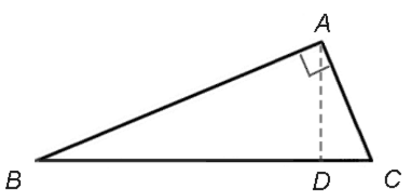


Figure I.19.4 : Autre démonstration du théorème de Pythagore.

4. Voir le livre *The Pythagorean Proposition* par Elisha S. Loomis, qui en présente 367. Disponible ici : `https://www.lapasserelle.com/documents/Pythagorean_Proposition_Elisha_S_Loomis.pdf`

Les trois triangles ABC, BDA et ADC ont la même forme, c'est-à-dire leurs trois angles sont respectivement égaux. On peut donc appliquer le théorème de Thalès et écrire

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

Les deux égalités se réécrivent comme ceci

$$AB \times AB = BD \times BC \quad \text{et} \quad AC \times AC = DC \times BC$$

En additionnant celles-ci, on obtient

$$\begin{aligned} AB \times AB + AC \times AC &= BD \times BC + DC \times BC \\ &= (BD + DC) \times BC = BC \times BC \end{aligned}$$

C.Q.F.D. [5]

Exercice I.19.1 : Sur la figure I.19.3, on a construit le carré central $BCGH$ sur l'hypoténuse du triangle rectangle initial ABC. Puis on a placé trois répliques d'ABC contre les autres côtés de ce carré central. Et on a déclaré que la figure passant par les points $ABDHEGFC$ était un carré.

Montrer qu'effectivement, les points D, B et A sont alignés, de même que les points D, H et E, les points E, G et F, et les points F, C et A.

Exercice I.19.2 : On construit un triangle ABC rectangle en A. La hauteur allant de A au point D sur le côté opposé a la longueur inconnue h. Mais on sait que $BD = 16$ et $DC = 9$.

Quelle est la valeur de h ?

5. Démonstration provenant du site `https://www.faculty.umb.edu/gary_zabel/Courses/Phil 281b/Philosophy of Magic/Arcana/Neoplatonism/Pythagoras/index.shtml.html`

Exercice I.19.3 : Généralisation de l'exercice précédent. Dans un triangle rectangle en A quelconque, figure I.19.4, dont la hauteur issue de A coupe le côté BC en D, montrer qu'on a toujours

$$AD = \sqrt{BD \times DC} \tag{I.19.4}$$

Exercice I.19.4 : On considère sur la figure suivante les points A et B de coordonnées

$$\begin{aligned} A &= (3,\ 10) \\ B &= (5,\ 7) \end{aligned}$$

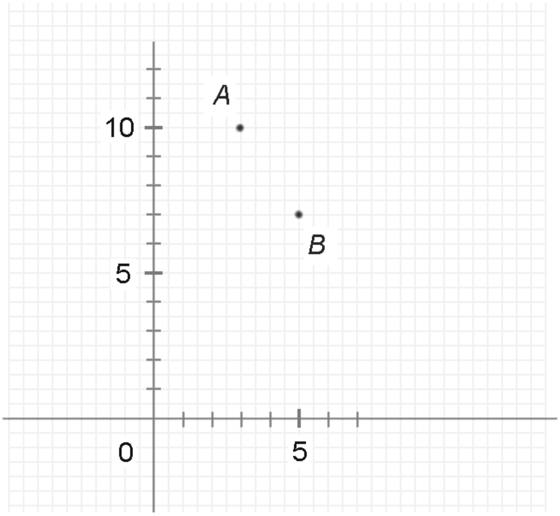


Figure I.19.5 : Deux points A et B repérés par leurs coordonnées cartésiennes.

Montrer que la distance entre A et B est $\sqrt{13}$.

Avec le théorème de Thalès et maintenant le théorème de Pythagore, nous avons les deux grands outils pour commencer à faire de la géométrie élémentaire intéressante.

Nous pouvons faire de la géométrie pure comme les Grecs. Ou nous pouvons même utiliser les repères cartésiens pour travailler avec des points repérés par leurs coordonnées. L'exercice I.19.4 montre que les coordonnées permettent de calculer des distances entre points. C'est le début de la *géométrie analytique* qui est allée plus loin que celle des Grecs [6].

Nous avons dit que la méthode des coordonnées – qui est à la base de la géométrie analytique, et, indirectement, du calcul intégral et différentiel – est due à Descartes (1596-1650). Pour être juste il faut aussi mentionner Fermat (c. 1605 - 1665) qui l'a inventée indépendamment, mais il est allé moins loin que Descartes.

Nous verrons que la géométrie analytique permet aussi de transformer des courbes dans le plan en équations en algèbre. Nous étudierons la géométrie analytique dans la deuxième partie du livre et dans le volume consacré aux mathématiques du lycée. En un mot, elle permet de transformer des problèmes de géométrie pure en problèmes d'algèbre, et réciproquement. Parfois un problème est plus facile à résoudre par de la géométrie pure, parfois par de l'algèbre.

Exercice I.19.5 : Avec une règle et un compas, tracer deux droites perpendiculaires l'une par rapport à l'autre.

Exercice I.19.6 : Soit deux points A et B, de coordonnées $(x_A,\ y_A)$ et $(x_B,\ y_B)$. Montrer que *le carré* de leur distance est égal à

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \tag{I.19.5}$$

6. Entre la géométrie grecque classique et la géométrie analytique, il y a eu la géométrie projective inventée par l'École d'Alexandrie (école grecque tardive) et la trigonométrie développée principalement par les Arabes et que l'on va aborder dans la leçon suivante.

Exercice I.19.7 : Considérer le plan équipé d'un repère cartésien, d'origine O. Montrer que l'ensemble des points de coordonnées $(x,\ y)$ satisfaisant la contrainte

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{I.19.6}$$

est le cercle de rayon 1 centré en O.

Exercice I.19.8 : Soit une droite D et un point P sur cette droite. Avec une règle et un compas, tracer la droite perpendiculaire à D passant par P.

Aide : Commencer par tracer un cercle quelconque centré en P. Appeler les deux points où il coupe D, les points Q et R. Tracer un cercle assez large centré en Q, et un cercle de même rayon centré en R de sorte qu'ils se coupent. Considérer les deux points d'intersection de ces deux cercles.

Exercice I.19.9 : Objectif : à partir d'un segment de longueur x, avec seulement une règle et un compas tracer un segment de longueur $\sqrt{x}$.

Soit une droite D et trois points A, B et C sur cette droite (B entre A et C), tels que $AB = x$ mètres, et $BC = 1$ mètre.

1. Tracer la perpendiculaire D' à D passant par B.
2. Trouver le milieu O du segment AC, et tracer le cercle de centre O passant par A et C.
3. Appeler Q le point d'intersection de la droite D' et du cercle qu'on vient de tracer.
4. Montrer que AQC est un triangle rectangle.
5. Montrer que la longueur de BQ est $\sqrt{x}$ mètres.

Exercice I.19.10 : Utiliser le théorème de Pythagore deux fois pour calculer la longueur de la grande diagonale d'un cube d'un mètre de côté. La grande diagonale part d'un sommet de la face supérieure et rejoint le sommet opposé sur la face inférieure.

Exercice I.19.11 : Utiliser le théorème de Pythagore pour montrer que dans un triangle équilatéral de côté 1, les hauteurs valent $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice I.19.12 : Montrer que dans un tétraèdre régulier d'arête 1, les hauteurs valent $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

I.19.4 Triplets pythagoriciens

Trois nombres entiers a, b, et c tels que

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{I.19.7}$$

forment un *triplet pythagoricien*. Le plus connu des triplets pythagoriciens est

$$(3,\ 4,\ 5)$$

Un triangle dont les trois côtés ont pour longueur 3 décimètres, 4 dm et 5 dm est un triangle rectangle. Les Égyptiens connaissaient ce fait et l'utilisaient pour tracer des angles droits. Ils utilisaient une « corde à treize nœuds » : sur une corde, faire treize nœuds *régulièrement espacés*. Puis la tendre sur un plan, en faisant coïncider le premier et le dernier nœud, de sorte qu'elle forme un triangle de côtés, 3, 4 et 5. Alors ils savaient que l'angle opposé au côté de longueur 5 était droit.

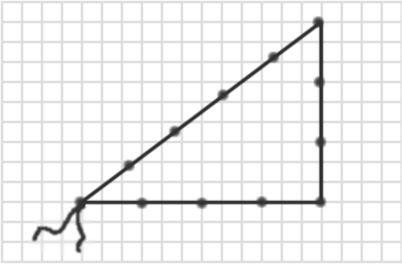


Figure I.19.6 : Corde à treize nœuds utilisée par les Égyptiens pour tracer des angles droits.

Autres exemples de triplets pythagoriciens :

$$(5,\ 12,\ 13)$$

$$(8,\ 15,\ 17)$$

$$(7,\ 24,\ 25)$$

$$(20,\ 21,\ 29)$$

On a trouvé sur une tablette mésopotamienne datant d'environ 1800 avant J.-C. une série de paires de nombres qui sont chaque fois les nombres a et b d'un triplet pythagoricien [7]. Et elle présente sans doute des résultats connus depuis au moins la fin du IIIe millénaire.

En dépit de la corde à treize nœuds des Égyptiens et des triplets connus par les Babyloniens, il n'est pas clair que les Égyptiens ou les Babyloniens aient fait le lien entre les triplets pythagoriciens et le théorème de géométrie, appelé théorème de Pythagore, énonçant que le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle a pour aire la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Dans son livre *Éléments*, Euclide donne la formule suivante pour produire des triplets pythagoriciens : prendre deux

7. Soit bien avant l'époque de Pythagore ! Voir `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras/`

nombres entiers quelconques m et n, avec $m > n > 0$, alors les nombres

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2 \tag{I.19.8}$$

forment un triplet pythagoricien.

Exercice I.19.13 : Montrer que les trois nombres a, b et c donnés par la formule (I.19.8) forment un triplet pythagoricien.

I.20 Trigonométrie : sinus d'un angle, règle des sinus dans un triangle

I.20.1 Introduction

Nous abordons la trigonométrie. L'étymologie du mot suggère qu'il s'agit de la mesure des triangles. C'est vrai mais c'est surtout la mesure des *angles*, à l'aide de certains nombres eux-mêmes issus de considérations sur des triangles – plus précisément des triangles rectangles.

En géométrie élémentaire du plan, les objets les plus simples sont les points, les droites ou segments de droite, et les angles. Les points ne se mesurent pas. Ils n'ont pas d'extension. On les place, ou on cherche à décrire où ils se trouvent, par exemple à l'intersection de deux droites. On place aussi les droites, ou on cherche à décrire leur position, par exemple en donnant deux points par lesquels elles passent.

Les angles sont un peu moins commodes à décrire et mesurer. Au départ ce sont des portions de plan délimitées par deux demi-droites concourantes. La façon la plus évidente de les mesurer est comme des portions de cercles (ou disques, c'est-à-dire des « parts de tarte »). Mais paradoxalement cette « circularité » ne les rend pas très maniables dans les raisonnements géométriques ou algébriques.

Les Grecs et les Indiens commencèrent à travailler avec d'autres mesures que les simples « proportions de tartes » pour manier les angles. Ils comprirent que certaines quantités interceptées par les angles offraient une bonne façon de manier les angles eux-mêmes dans les raisonnements géométriques. Nous n'allons pas décrire en détail l'histoire de l'émergence de la trigonométrie de la Grèce classique jusqu'au milieu du premier millénaire de notre ère.

Ce sont les Arabes qui créèrent la trigonométrie telle qu'on la connaît et l'utilise de nos jours. Ils comprirent l'importance du *sinus* d'un angle θ (lire « thêta »), et d'autres *fonctions trigonométriques* attachées à un angle θ.

En mathématiques plus avancées, aux XVIIIe et XIXe siècles, les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, etc.) s'avérèrent jouer un rôle très important en algèbre et en analyse dépassant largement leur simple usage en géométrie.

Commençons toutefois par leur simple usage en géométrie du plan, et tout d'abord par leur définition.

Prenons un angle θ compris – parce que c'est le plus simple pour commencer – entre 0 et 90°. Il est déterminé par les deux demi-droites d_1 et d_2 montrées sur la figure I.20.1. Et on prend en compte son orientation : on va de d_1 vers d_2 par le plus petit tour possible. Il s'agit dans le cas de figure d'un angle de 20° dans le sens positif (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre).

L'idée est de voir l'angle θ comme l'un des angles d'un triangle rectangle.

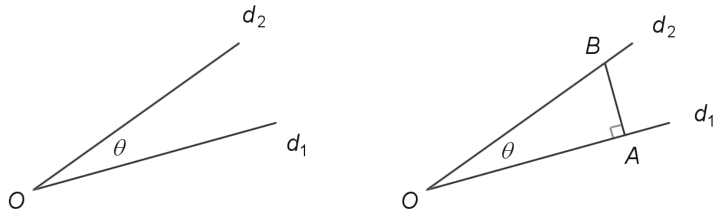


Figure I.20.1 : Angle θ vu comme l'un des angles d'un triangle rectangle.

On a pris un point quelconque A sur la demi-droite d_1 et on a tracé la droite perpendiculaire. Elle coupe d_2 en B. Maintenant on va utiliser le triangle rectangle OAB. On va attacher à l'angle θ des quantités mesurées dans ce triangle. Et elles vont caractériser l'angle θ.

Chemin faisant, dans le développement des concepts trigonométriques, on va à plusieurs reprises utiliser toute la puissance des théorèmes de Thalès et de Pythagore qui font maintenant partie de notre boîte à outils mathématiques.

I.20.2 Sinus d'un angle aigu θ

Continuons avec notre angle aigu θ montré sur la figure I.20.1.

C'est l'un des deux angles autres que l'angle droit dans le triangle rectangle OAB. On *définit* le sinus de l'angle θ comme ceci

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} \tag{I.20.1}$$

La notation $\sin\theta$ se lit « sinus de l'angle thêta » ou plus simplement « sinus thêta ».

Première observation importante : le sinus de l'angle θ tel qu'on vient de le définir ne dépend pas de l'endroit où on a placé le point A.

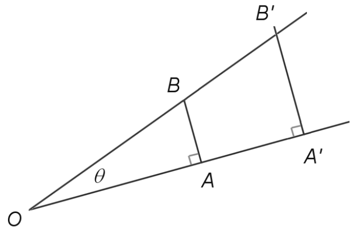


Figure I.20.2 : Le calcul de $\sin\theta$ ne dépend pas de l'endroit où l'on place le point A.

On peut calculer le sinus de l'angle θ à partir des points A' et B', on obtient la même valeur. C'est une application immédiate du théorème de Thalès.

Quelle est la valeur du sinus de l'angle θ ? Sur la figure I.20.1, nous avons dessiné un angle θ de 20°. Vous pouvez le vérifier avec un rapporteur. Pour calculer son sinus, a priori il faut prendre son double décimètre, placer le point A où on veut, mesurer AB et OB, et calculer le ratio.

Exercice I.20.1 : Sur une feuille de papier, avec une règle graduée, un rapporteur et un compas, tracer un angle de 20°. Placer le point A à 15 centimètres du point O sur la demi-droite d_1.

Avec la règle et le compas tracer la perpendiculaire à d_1, et noter le point B.

Mesurer AB. Vous devez trouver $\approx$ 5,46 centimètres.

Mesurer OB. Vous devez trouver $\approx$ 15,96 centimètres.

Calculer sin 20°. Vous devez trouver $\approx$ 0,342.

Exercice I.20.2 : Pourquoi un angle de 20° est aussi appelé l'angle $\frac{\pi}{9}$?

Exercice I.20.3 : Vérifier le théorème de Pythagore avec les trois mesures OA, AB et OB de l'exercice I.20.1.

Dans la pratique, on ne calcule pas le sinus d'un angle en traçant soigneusement l'angle sur une feuille de papier et en faisant les constructions et les mesures de l'exercice I.20.1. On utilise une calculette. Quand je mets la calculette de mon téléphone portable en mode scientifique, les fonctions trigonométriques calculées avec des angles en degré, que j'entre 20° et que je demande le sinus, j'obtiens

$$\sin 20 = 0,34202014332566873304409961468226...$$

ce qui est une précision suffisante pour mes besoins :-)

Deuxième observation importante : Si je vous donne le sinus d'un angle aigu, vous pouvez retrouver l'angle.

On dit qu'il y a une *relation biunivoque* entre les sinus (positifs) et les angles aigus (de sens positif). On appelle cela aussi une *bijection*. En clair,

- à tout angle aigu correspond un et un seul sinus ;
- à tout sinus correspond un et un seul angle aigu ;
- deux angles aigus différents ont deux sinus différents ;
- et deux sinus différents correspondent à deux angles différents.

Pour certains angles, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à sa calculette pour connaître le sinus.

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= 0 \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 90^\circ &= 1 \end{aligned} \tag{I.20.2}$$

Exercice I.20.4 : Démontrer toutes les formules de la liste (I.20.2).

Pour résoudre cet exercice, vous avez besoin du théorème de Pythagore. On voit ainsi que la trigonométrie fait un large usage des théorèmes de Thalès et Pythagore.

Avant d'aller plus loin dans deux directions (d'une part calculer le sinus d'autres angles que les angles aigus positifs, et d'autre part définir les autres fonctions trigonométriques, cosinus, tangente, arcsin, arccos, etc.) prenons un peu de recul.

Maintenant à tous les angles (pour l'instant aigus et tournant dans le sens positif) on associe de manière bijective un autre nombre que sa mesure en degré. On peut se demander qu'est-ce que cela apporte.

Voici la correspondance bijective entre les angles aigus et leur sinus représentée sous la forme d'une fonction avec en variable indépendante la valeur de l'angle en degré, et en variable dépendante le sinus.

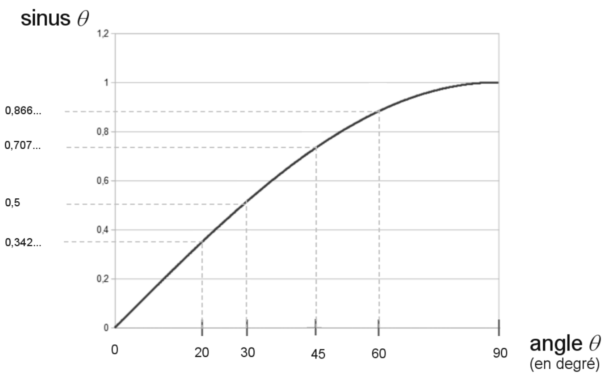


Figure I.20.3 : Bijection entre les angles aigus entre 0° et 90° et leurs sinus [8].

Exercice I.20.5 : Donner approximativement le sinus de 80° en lisant sur la courbe de la figure I.20.3.

Quel angle, approximativement, a pour sinus 0,4 ?

Nous allons découvrir peu à peu que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les sinus sont *très utiles*.

Exercice I.20.6 : Est-ce que le sinus de $2\times\theta$ est deux fois le sinus de θ ?

Vers quels angles c'est presque vrai ?

8. Cette courbe est une portion de la célèbre courbe sinusoïdale que nous étudierons un peu plus loin.

I.20.3 Extension au sinus d'un angle obtus θ

Quand on a un angle θ compris entre 90° et 180°, on définit son sinus de manière très simple : c'est par définition le sinus de l'angle

$$\theta' = \theta - 2 \times (\theta - 90) = 180 - \theta \qquad \text{(I.20.3)}$$

Un dessin va permettre de comprendre tout de suite quel est cet angle θ'.

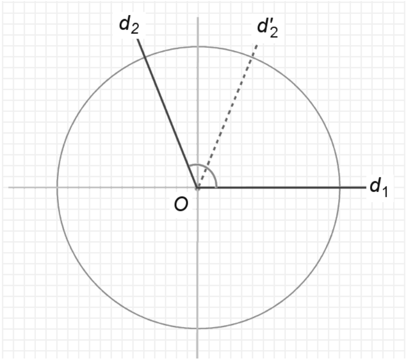


Figure I.20.4 : L'angle θ est l'angle $\widehat{d_1Od_2}$. C'est un angle obtus. Alors on définit l'angle θ' à l'aide de la demi-droite d_2' symétrique de d_2 par rapport à la verticale. L'angle $\theta' = \widehat{d_1Od_2'}$. Et on définit le sinus de θ comme étant le sinus de θ'.

L'angle θ' est l'angle formé par les demi-droites d_1 et d_2'. On définit le sinus de l'angle θ comme étant celui de l'angleθ'.

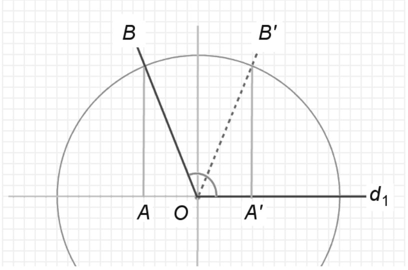


Figure I.20.5 : $\sin\theta$ est par définition $\sin\theta'$. C'est $A'B'/OB'$. Et c'est bien sûr aussi AB/OB.

On peut ainsi étendre la courbe représentée sur la figure I.20.3. Elle devient :

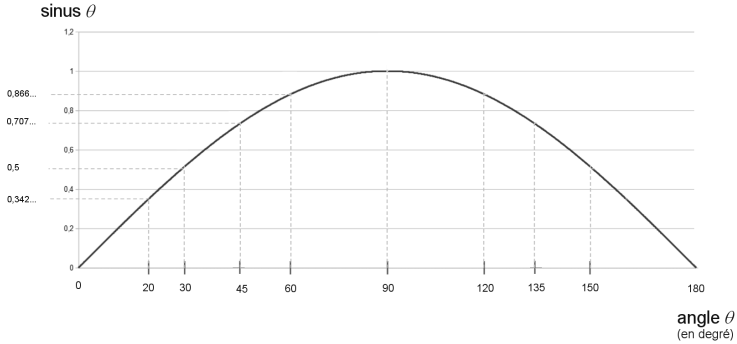


Figure I.20.6 : Courbe du sinus d'un angle entre 0° et 180°[9]. Ce n'est plus une bijection puisque maintenant pour chaque valeur du sinus il y a deux angles qui lui correspondent.

Les graphiques avec des cercles comme sur les figures I.20.4 et I.20.5 sont très courants en trigonométrie. On les rencontrera fréquemment. Un autre graphique, sans cercle, qu'il est bon d'avoir en tête pour le sinus d'un angle obtus dans un triangle est le suivant :

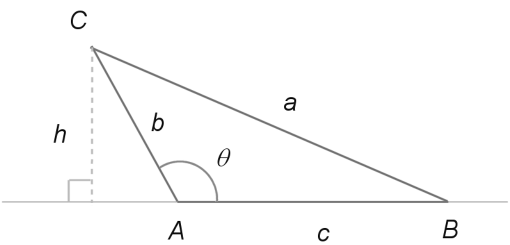


Figure I.20.7 : Autre schéma classique pour montrer le calcul du sinus d'un angle obtus :

$$\sin\theta = \frac{h}{AC} \qquad \text{(I.20.4)}$$

9. C'est maintenant une moitié de « période » complète de sinusoïde. L'autre moitié la prolongera vers la droite, mais symétrique en dessous de l'axe horizontal.

Exercice I.20.7 : Donner les sinus de 120°, 135°, 150° et 180°.

Exercice I.20.8 : Avec votre calculette, vérifier que le sinus de 80° est le même que le sinus de 100°, et que le sinus de 50° est le même que le sinus... de quel angle ?

Exercice I.20.9 : Peut-il y avoir deux angles obtus dans un triangle ? Peut-il n'y en avoir aucun ?

Nous présenterons les autres fonctions trigonométriques (cosinus, tangente, etc.) dans la leçon suivante. Nous étendrons aussi les sinus et les autres fonctions aux angles entre 180° et 0°, complétant ainsi le cercle de la figure I.20.4.

Pour terminer cette première leçon de trigonométrie, qui a introduit l'important concept de sinus pour manipuler commodément un angle dans des raisonnements géométriques et des calculs algébriques, montrons l'importante règle des sinus dans un triangle.

I.20.4 Règle des sinus dans un triangle

La *règle des sinus* énonce une propriété remarquable des trois sinus d'un triangle quelconque.

Soit le triangle de sommets A, B et C. Notons avec un chapeau les trois angles correspondants, et a, b et c les longueurs des trois côtés opposés.

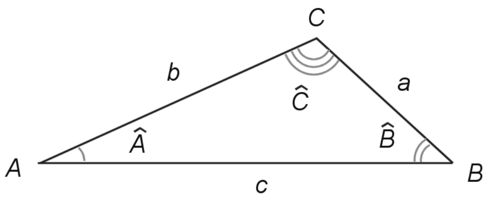


Figure I.20.8 : Triangle quelconque.

Alors on a

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \tag{I.20.5}$$

Montrons la première égalité quand $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont tous les deux aigus.

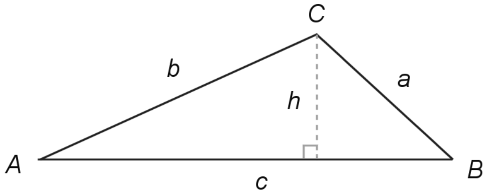


Figure I.20.9 : La hauteur issue de C a la longueur h.

On voit qu'on a

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{h}{b} \times \frac{1}{a}$$

et

$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{h}{a} \times \frac{1}{b}$$

Donc les deux termes de gauche sont égaux. On le montre de la même manière pour l'angle $\hat{C}$ s'il est plus petit que 90° ; et on adapte un peu la démonstration s'il est plus grand.

Exercice I.20.10 : Sur la figure I.20.9, où $\hat{C} > 90°$, montrer que la deuxième égalité dans (I.20.5) est encore vraie.

I.20.5 Triangulation

La règle des sinus est très importante et utile en *triangulation*. La triangulation est la technique géométrique qui consiste à mesurer des distances (parfois de plusieurs kilomètres) à l'aide de mesures d'angles et de mesures d'autres distances. C'était très utile en cartographie avant les satellites et le système GPS. Elle sert encore beaucoup en navigation.

Prenons un exemple. Supposons que dans le triangle ci-dessous, on connaisse l'angle $\hat{A}$, l'angle $\hat{B}$ et la distance AB ($=c$). Alors on en déduit la distance CB ($= a$) de la manière suivante.

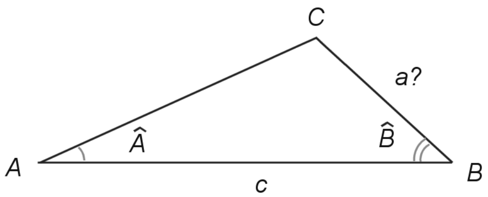


Figure I.20.10 : On connait les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ et la longueur c. Quelle est la longueur a ?

D'abord on déduit l'angle $\hat{C}$ ($= 180° - \hat{A} - \hat{B}$). Puis on écrit

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

D'où

$$a = c \times \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{C}} \tag{I.20.6}$$

Exercice I.20.11 : Soit une côte rectiligne et un phare en mer sur un îlot à une certaine distance de la côte, figure du même genre que I.20.10.

Depuis le point A sur la côte, le phare (qu'on appelle le point C) fait un angle de 27° avec la plage. Et depuis le point B, distant de 2 km du point A, le phare fait un angle de 32°.

À quelle distance de la côte est le phare ?

Une autre propriété intéressante de $\sin \hat{A}/a$ est que c'est l'inverse du diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Exercice I.20.12 : Soit un triangle quelconque ABC. Dénotons par D le diamètre de son cercle circonscrit.

Montrer que

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{1}{D} \tag{I.20.7}$$

I.21 Trigonométrie : cosinus et tangente, théorème d'Al-Kashi

I.21.1 Introduction

Plusieurs autres fonctions trigonométriques sont importantes : cosinus, tangente, cotangente, arcsin, arccos, arctan, etc. Elles sont toutes liées entre elles.

Commençons par les deux plus importantes à connaître avec le sinus : le cosinus et la tangente.

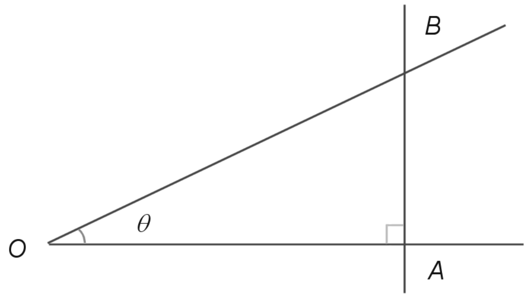


Figure I.21.1 : Angle θ et calcul de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$.

On a vu que

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} \tag{I.21.1}$$

Eh bien, de même on *définit*

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB} \tag{I.21.2}$$

et

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA} \tag{I.21.3}$$

La formule (I.21.1) se lit « sinus thêta égale AB sur OB ». La deuxième formule se lit « cosinus thêta égale OA sur OB ». Et la troisième se lit « tangente thêta égale AB sur OA ».

Nous avons donné ces définitions pour un angle aigu, car c'est le plus simple. Nous verrons plus loin comment on définit les fonctions trigonométriques pour un angle obtus et pour un angle rentrant.

I.21.2 Relations entre les fonctions trigonométriques

Les trois fonctions, sinus, cosinus, et tangente, calculées pour un angle θ ont des relations simples entre elles :

<u>Première relation simple</u> :

La tangente de l'angle θ est le rapport du sinus au cosinus.

En effet, on vérifie immédiatement que

$$\tan\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{\frac{AB}{\cancel{OB}}}{\frac{OA}{\cancel{OB}}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{I.21.4}$$

<u>Deuxième relation simple</u> :

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{I.21.5}$$

Cela découle directement du théorème de Pythagore.

Notation : souvent, pour alléger les notations, au lieu de $(\sin\theta)^2$ on note $\sin^2\theta$, qui ne crée pas d'ambiguïté (alors que $\sin\theta^2$ en créerait).

Troisième relation simple :
Comme les angles en O et en B se complètent pour faire 90°, sur la figure I.20.1 on voit aussi que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \sin(90-\theta) \\ \sin\theta &= \cos(90-\theta) \end{aligned} \tag{I.21.8}$$

I.21.3 Angles obtus et rentrants

Dans la leçon précédente on a présenté le sinus d'un angle aigu et aussi le sinus d'un angle obtus. Sans rentrer dans les détails – car nous y reviendrons plus tard de manière plus systématique – donnons les définitions des trois fonctions trigonométriques principales quand l'angle θ est obtus.

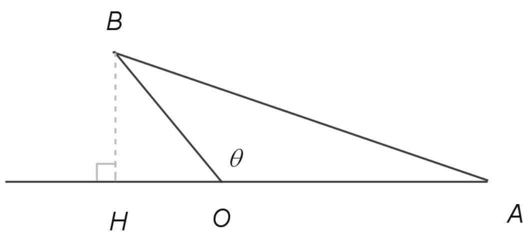


Figure I.21.2 : Calcul de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et $\tan\theta$ dans le cas où θ est un angle obtus..

On définit :

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{HB}{OB} \\ \cos\theta &= -\frac{OH}{OB} \\ \tan\theta &= -\frac{HB}{OH} \end{aligned} \tag{I.21.9}$$

Le point important à noter est que, dans la définition du cosinus, on met un *signe moins* devant le ratio des distances OH et OB. Et il se retrouve donc dans celle de la tangente, en vertu de la relation (I.21.4).

Signalons aussi que, quand θ est entre 180° et 270°, son sinus et son cosinus ont tous les deux un signe moins (la tangente a alors un signe plus). Et quand θ est entre 270° et 360°, le sinus est négatif, mais le cosinus est de nouveau positif.

Nous y reviendrons quand nous parlerons plus en détail du cercle trigonométrique, que nous avons déjà rencontré sans le nommer : c'était le cercle de la figure I.20.4, page 134.

I.21.4 Autres fonctions trigonométriques (1) : fonction cotangente

Il y a une autre fonction trigonométrique définie par un rapport de distances sur la figure I.21.1, c'est la fonction cotangente.

Elle est définie comme le ratio OA divisé par AB. Elle est notée $\cot\theta$ ou parfois cotan θ.

On voit que c'est simplement $1/\tan\theta$. Aussi est-elle tombée en désuétude.

I.21.4 Autres fonctions trigonométriques (2) : les fonctions inverses

Beaucoup plus importantes que la fonction cotangente, il faut parler des fonctions arc sinus (notée arcsin), arc cosinus (notée arccos) et arc tangente (notée arctan).

À un nombre s compris entre 0 et 1, la fonction arcsin associe l'angle θ entre 0 et 90° qui a s pour sinus. On a vu dans la leçon précédente qu'il y a une bijection entre le segment [0, 90°] et le segment [0, 1], donc la fonction inverse de la fonction sinus est bien définie. Par exemple, $\arcsin 0,5 = 30°$. (On n'associe pas à 0,5 l'angle 150°, bien qu'il ait aussi pour sinus 0,5 [10].)

10. C'est comme pour la racine carrée. Par exemple, il y a deux nombres dont le carré est 4 : ce sont -2 et $+2$. Mais, par convention, le signe $\sqrt{4}$ dénote seulement le nombre $+2$.

On définit de même la fonction arc cosinus. Cette fois on a une bijection entre le $[0,\ 180°]$ et le segment $[-1,\ 1]$. Par exemple $\arccos -0,5 = 120°$.

Exercice I.21.1 : Donner le cosinus des angles 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150° et 180°.

Exercice I.21.2 : Montrer que $\cos 120°$ est égal à $-0,5$, et que c'est le seul angle entre $[0,\ 180°]$ pour lequel c'est vrai.

Exercice I.21.3 : Comme on l'a fait sur la figure I.20.6 pour la fonction sinus pour les angles entre $[0,\ 180°]$, tracer la courbe de la fonction cosinus pour les angles dans le même segment.

Aide : La première partie ressemblera à la partie entre 90° et 180° de la figure I.20.6, la suite sera sous l'axe horizontal.

Exercice I.21.4 : Dessiner la fonction arccos quand la variable indépendante varie entre -1 et $+1$.

Exercice I.21.5 : Montrer que les fonctions sinus et cosinus prennent leurs valeurs entre -1 et $+1$, tandis que la fonction tangente prend ses valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.

Aide : Regarder séparément ce qui se passe dans chaque quadrant. (Les quatre quadrants, dans l'ensemble de tous les angles possibles, sont définis comme les quatre segments $[0, 90°]$, $[90°,\ 180°]$, $[180°,\ 270°]$, et $[270°,\ 360°]$.)

Nous rencontrerons dans les années à venir de nombreuses propriétés merveilleuses des sinus, cosinus et tangentes.

La trigonométrie est souvent citée comme exemple des maths compliquées du collège [11]. En réalité, comme on l'a vu, ses concepts de base sont fort simples : il s'agit de caractériser un angle par des relations géométriques quand il est l'un des angles aigus d'un triangle rectangle, et en étendant cela aux angles obtus. On peut ensuite appliquer le théorème de Pythagore, et les raisonnements faisant intervenir les angles deviennent beaucoup plus faciles. La triangulation devient une pratique à la fois simple et très utile.

Il est vrai que – de manière inattendue – les fonctions sinus et cosinus ont aussi des propriétés extraordinaires qui jouent un rôle important en mathématiques supérieures [12].

Pour l'instant, terminons cette leçon avec la présentation du théorème d'Al-Kashi.

I.21.5 Théorème d'Al-Kashi

On a vu que le théorème de Pythagore était un théorème sur les triangles rectangles. Le théorème d'Al-Kashi le généralise à tous les triangles.

Considérons un triangle ABC quelconque. Intéressons-nous à la longueur de AB (notée c), quand on connaît les longueurs a et b et l'angle θ.

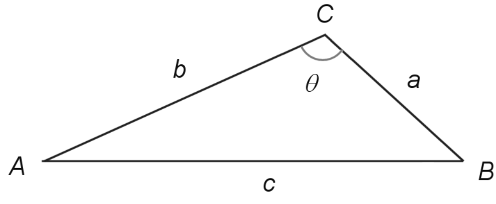


Figure I.21.3 : Triangle quelconque et théorème d'Al-Kashi.

11. Voir la chanson de Sam Cooke `https://www.lapasserelle.com/songs_video/wonderful_world_sam_cooke/wonderful_world_sam_cooke.html`

12. Par exemple, dans ce qu'on appelle l'analyse de Fourier.

On ne peut plus réciter le Pont aux ânes : « le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés », car maintenant si l'angle θ en C n'est pas droit ce n'est plus vrai. Du reste, le côté AB ne porte plus le nom d'hypoténuse ; c'est simplement « le côté opposé au sommet C ».

Le théorème d'Al-Kashi énonce que dans un triangle quelconque, comme sur la figure I.21.3, on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\theta \tag{I.21.10}$$

Avant même de passer à la démonstration de ce joli théorème observons que si $\theta = 90°$ son cosinus est égal à zéro, et on est ramené au théorème de Pythagore.

Démonstration du théorème d'Al-Kashi :

Démontrons le théorème dans le cas de figure où l'angle θ en C est un peu plus grand que 90° (et donc $\cos\theta$ est un nombre négatif). On trace la hauteur issue de B vers le segment AC. Elle l'atteint au point H. Et la longueur du segment HB est notée h.

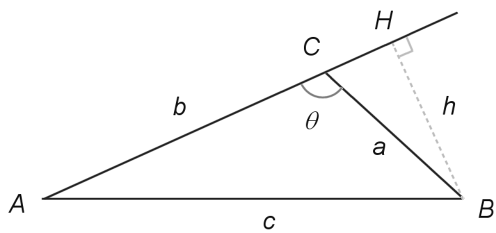


Figure I.21.4 : Démonstration du théorème d'Al-Kashi.

Par Pythagore appliqué dans le triangle AHB, on a

$$c^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (b + CH)^2$$

On développe le produit $(b + CH)^2$ et on obtient

$$c^2 = h^2 + b^2 + 2 \times b \times CH + CH^2$$

Notons que $h^2 + CH^2 = a^2$, donc on arrive à

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \times b \times CH$$

Maintenant notons aussi que le rapport des deux longueurs CH et a est

$$\frac{CH}{a} = \cos \widehat{BCH} = -\cos\theta$$

puisque le cosinus de θ va être ce même ratio $\frac{CH}{a}$, mais avec un signe moins devant.

Finalement on aboutit à la formule :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\theta \tag{I.21.11}$$

qui est la même formule que (I.21.10).

C.Q.F.D.

Dans le cas de figure où l'angle θ est plus petit ou égal à 90° la démonstration est encore plus simple.

Al-Kashi (1380-1429) était un mathématicien et astronome perse. Son nom signifie qu'il est né à Kashan, une ville entre Téhéran et Ispahan. C'était un ami du célèbre astronome et sultan Ulugh Beg (1394-1449) [13]. Ils enseignèrent tous les deux à l'université de Samarcande.

Exercice I.21.6 : Sur une feuille de papier, avec une règle graduée et un compas, vérifier le théorème de Al-Kashi quand θ fait 120°. Essayer plusieurs valeurs pour les longueurs a et b. Mesurer chaque fois c. Et vérifier que vous obtenez chaque fois

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$$

Aide : $\cos 120° = -1/2$.

13. Ulugh Beg était un petit-fils de Tamerlan (1336-1405).

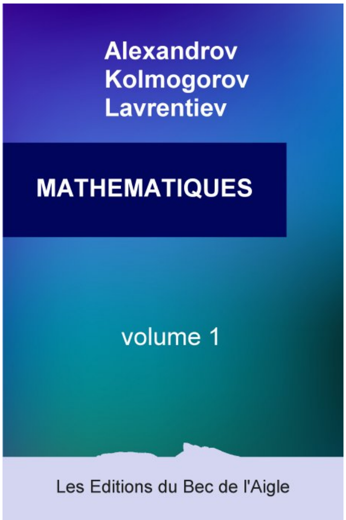
Exercice I.21.7 : Quand $\theta = 90°$, on a vu que le théorème d'Al-Kashi exprime simplement le théorème de Pythagore.

Expliquer ce qu'exprime le théorème d'Al-Kashi quand θ est un angle plat.

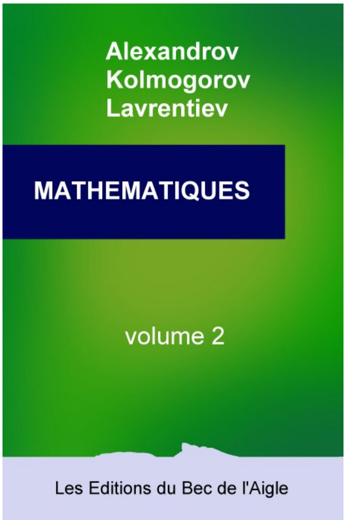
fin de l'échantillon gratuit

Catalogue des

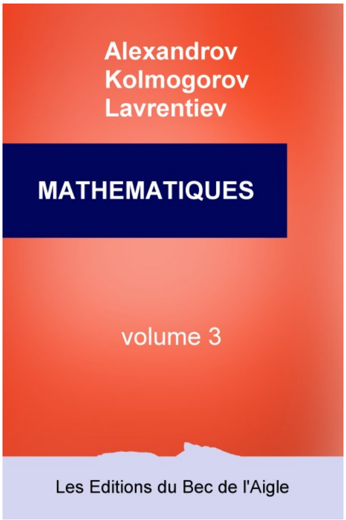
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

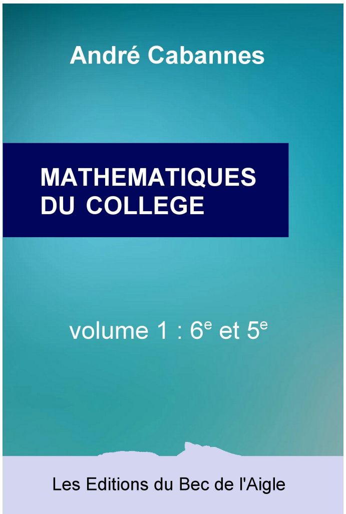


www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)

www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239159
Mathématiques du collège.
Volume 1 : 6e et 5e.

À l'intention des collégiens et de leurs parents.

Volume 2 (classes de 4e et 3e) : *à paraître fin 2022.*